ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2015, вип. **20**

УДК 517.5

В. М. Трактинська, М. Є. Ткаченко
Днiпропетровський нацiональний унiверситет iменi Олеся Гончара

Критерiй елемента найкращого несиметричного наближення функцiй багатьох змiнних у просторах $L_{p_1,\ldots,p_n}$

Дослiджено питання характеризацiї елемента найкращого несиметричного наближення для функцiй багатьох змiнних у просторах зi змiшаною iнтегральною метрикою. Одержано критерiй елемента найкращого несиметричного наближення у вказаних просторах.

Ключовi слова: змiшана iнтегральна метрика, елемент найкращого наближення, несиметрична норма.

Исследованы вопросы характеризации элемента наилучшего несимметричного приближения для функций многих переменных в пространствах со смешанной интегральной метрикой. Получен критерий элемента наилучшего несимметричного приближения в указанных пространствах.

Ключевые слова: смешанная интегральная метрика, элемент наилучшего приближения, несимметричная норма.

The questions of the characterization of the best nonsymmetric approximant for the multivariable functions in spaces with mixed integral metric were considered in this article. The criterion of best nonsymmetric approximant in these spaces is obtained.

Key words: mixed integral metric, the best nonsymmetric approximant, nonsymmetric norm.

Нехай $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \le i \le n$ — $n-$вимiрний паралелепiпед.

Для вектора $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n), 1 \le p_i < \infty, 1 \le i \le n$ через $L_{\bar{p}} = L_{\bar{p}}(K)$ будемо позначати простiр сумовних на K функцiй n змiнних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ з нормою

$$\|f\|_{\bar{p}} = \|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \left[\int\limits_{I_n} \ldots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}}.$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\ldots,p_i} = \left[\int\limits_{I_i} \ldots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k} dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1}\right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i\right]^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1 \le k < n,\ 1 < i \le n$.

Введемо також до розгляду класи $L_{p_1,\dots,p_n}$ (де хоча б одне $p_i = \infty$) функцій f, скінченні норми яких визначають за формулами

$$\|f\|_{p_1,\dots,p_{n-1},\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x_n \in I_n} |f|_{p_1,\dots,p_{n-1}},$$

$$\|f\|_{p_1,\dots,p_{i-1},\infty,p_{i+1},\dots,p_n} =$$

$$= \left[\int\limits_{I_n} \dots \left[\int\limits_{I_{i+1}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_i \in I_i} |f|_{p_1,\dots,p_{i-1}} \right)^{p_{i+1}} dx_{i+1} \right]^{\frac{p_{i+2}}{p_{i+1}}} \dots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}},$$

де $1 \le i < n$.

Якщо $0 < \alpha, \beta < \infty$, для $f(x)$ покладемо

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\},\ f_-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

$$\mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) = \alpha \cdot \mathrm{sgn} f_+(x) - \beta \cdot \mathrm{sgn} f_-(x),$$

$$|f|_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot f_+ + \beta \cdot f_-.$$

Визначиммо у просторі $L_{\bar{p}}$ несиметричну норму:

$$\|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} = \left[\int\limits_{I_n} \cdots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1}_{\alpha,\beta} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right]^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}},$$

а також покладемо

$$|f|_{p_k,\dots,p_i;\alpha,\beta} = \left[\int\limits_{I_i} \dots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k}_{\alpha,\beta} dx_k \right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1} \right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \dots dx_i \right]^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1 \le k < n,\ 1 < i \le n$.

Нехай $H_m = \mathrm{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ для деякої системи лінійно незалежних функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset L_{\bar{p}}$. Тоді елементи множини H_m (поліноми P_m) подають у вигляді

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k.$$

Для $f \in L_{\bar{p}}$ величину

$$E_m(f)_{\bar{p};\alpha,\beta} = \inf_{P_m \in H_m} \|f - P_m\|_{\bar{p};\alpha,\beta} \tag{1}$$

будемо називати найкращим (α,β)-наближенням функції f у просторі $L_{\bar{p}}$ множиною H_m. Поліном P_m^*, який реалізує inf у правій частині (1), називають елементом найкращого (α,β)-наближення функції f множиною H_m.

У 1973 р. Г.С. Смирнов у роботі [3] сформулював і довів критерій полінома найкращого наближення у просторах зі змішаною інтегральною метрикою для функцій двох змінних. Цей результат у [5] узагальнила на випадок несиметричної норми В.М. Трактинська. У роботі [6] В.М. Трактинська узагальнила результат Г.С. Смирнова на випадок функцій багатьох змінних. У даній статті вказаний результат поширюється на випадок найкращого несиметричного наближення функцій багатьох змінних.

Наведемо деякі твердження, на які ми будемо спиратись у ході доведення основного результату роботи. Викладену нижче теорему довів С.М. Нікольський [4].

Теорема 1. *1) Якщо $x, x_1, \ldots, x_m$ — елементи лінійного нормованого простору X, то*

$$\inf_{\lambda_k} \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \right\| = \sup_{\|F\| \le 1, F(x_k)=0} F(x), \tag{2}$$

де inf *поширюється на будь-які системи чисел λ_k, а* sup *— на будь-які функціонали, визначені на X з $\|F\| \le 1$, що задовольняють рівності $F(x_k) = 0$. 2) Якщо для елемента x існує лише один функціонал $F_0, \|F_0\| \le 1$, для якого $F_0(x) = \|x\|$ і ліва частина* (2) *досягає точної нижньої межі, коли $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, то $F_0(x_k) = 0$ для усіх $k = 1, \ldots, m$.*

Враховуючи загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в просторі $L_{\bar{p}}$, отримуємо ще одне твердження.

Наслідок 1.

$$E_m(f)_{\bar{p};\alpha,\beta} = \sup_g \int\limits_K f(x)g(x)dx,$$

де sup *поширюється на всі $g \in L_{\bar{q}}$ з $\|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1,\ g \perp H_m,\ \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ $(1 \le i \le n)$.*

Лема 1. *Для будь-якої пари функцій $f \in L_{\bar{p}}$ і $g \in L_{\bar{q}}$, де $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ $(1 \le i \le n)$,*

$$\int\limits_K f(x)g(x)dx \le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} \|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}}. \tag{3}$$

Рівність у (3) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$|g(x)|_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} = C\, |f|_{\alpha,\beta}^{p_1-1}\, |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}}, \tag{4}$$

де $C = \mathrm{const}, C > 0, 1 \le p_i, q_i < \infty,\ 1 \le i \le n$.

Доведення. Зауважимо, що завжди

$$\mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) \cdot \mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f(x) \equiv 1,$$

і для будь-яких функцій $f(x), g(x), h(x) \in L_{\bar{1}}$ $(h(x) > 0)$

$$\int\limits_K h(x) f(x) \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} g(x) dx \le \int\limits_K h(x) f(x) \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) dx.$$

Звідки для $f \in L_{\bar{p}}$ і $g \in L_{\bar{q}}$, застосовуючи нерівність Гьольдера для інтегралів, отримаємо

$$\int\limits_K f(x) g(x) dx = \int\limits_K f(x) \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) g(x) \mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f(x) dx \le$$

$$\le \int\limits_K f(x) \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) g(x) \mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} g(x) dx =$$

$$= \left[\int\limits_{I_n} \cdots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|_{\alpha,\beta} \, |g(x)|_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} \, dx_1 \right] dx_2 \right] \cdots dx_n \right] \le$$

$$\le \left[\int\limits_{I_n} \cdots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|_{\alpha,\beta}^{p_1} \, dx_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \left[\int\limits_{I_1} |g(x)|_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{q_1} \, dx_1 \right]^{\frac{1}{q_1}} dx_2 \right] \cdots dx_n \right] \le \ldots$$

$$\le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} \|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}}.$$

Тим самим ми довели (3). Співвідношення (4) обумовлене необхідною та достатньою умовою виконання рівності в нерівності Гьольдера. Твердження леми доведено.

Лема 2. *Якщо* $f \in L_{\bar{p}}$ $(1 < p_i < \infty)$, *то*

$$\sup_{\|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \int\limits_K f(x) g(x) dx = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}, \tag{5}$$

причому точна верхня межа досягається тільки на функції

$$g^*(x) = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{1-p_n} |f|^{p_1-1} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}} \mathrm{sgn}_{\alpha^{p_1},\beta^{p_1}} f(x). \tag{6}$$

Доведення. Той факт, що

$$\sup_{\|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \int\limits_K f(x) g(x) dx \le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}$$

одразу випливає з леми 1.

Покажемо тепер, що для визначеної в (5) функції мають місце рівності

$$\|g^*\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1,$$

$$\int\limits_K f(x)g^*(x)dx = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}. \tag{7}$$

Зауважимо, з означення функції g^* випливає, що $\mathrm{sgn} g^*(x) = \mathrm{sgn} f(x)$, а отже, $\mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f(x) = \mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} g^*(x)$.

Тоді

$$|g^*|_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{1-p_n} \cdot \left| |f|^{p_1-1}\mathrm{sgn}_{\alpha^{p_1},\beta^{p_1}} f |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}} \mathrm{sgn}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f \right| =$$

$$= \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{1-p_n} |f|_{\alpha,\beta}^{p_1-1} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}}.$$

Зважаючи на це, будемо мати

$$\|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1} \|g^*\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{I_n} \cdots \left[\int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1} \left| |f|_{\alpha,\beta}^{p_1-1} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}} \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2 \right]^{\frac{q_3}{q_2}} \cdots dx_n \right\}^{\frac{1}{q_n}}.$$

Зазначимо, що оскільки $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $1 \le i \le n$, то

$$\left(\int\limits_{I_1} \left| |f|_{\alpha,\beta}^{p_1-1} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} = \left(\int\limits_{I_1} |f|_{\alpha,\beta}^{(p_1-1)q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \cdot |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{(p_2-p_1)q_2} =$$

$$= \left(\int\limits_{I_1} |f|_{\alpha,\beta}^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{(p_2-p_1)q_2} = |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{\frac{p_1 q_2}{q_1}} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{(p_2-p_1)q_2} = |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2}.$$

Далі аналогічно до попереднього отримаємо

$$\left(\int\limits_{I_2} |f|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{q_3}{q_2}} |f|_{p_1,p_2;\alpha,\beta}^{(p_3-p_2)q_3} = |f|_{p_1,p_2;\alpha,\beta}^{p_3}.$$

Продовжуючи, отримаємо, що

$$\|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1} \|g^*\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{\frac{p_n}{q_n}} = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1},$$

звідки

$$\|g^*\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1.$$

Тепер покажемо, що правдива рівність (7).

$$\int\limits_K f(x)g^*(x)dx = \|f\|^{1-p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta} \int\limits_K f(x)\,|f|^{p_1-1}\,|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta}\cdots|f|^{p_n-p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}\,\mathrm{sgn}_{\alpha^{p_1},\beta^{p_1}} f(x)dx =$$

$$= \|f\|^{1-p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta} \int\limits_K |f|^{p_1}_{\alpha,\beta}|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta}\cdots|f|^{p_n-p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}dx.$$

Обчислимо

$$\int\limits_{I_1} |f|^{p_1}_{\alpha,\beta}|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta}dx_1 = \int\limits_{I_1} |f|^{p_1}_{\alpha,\beta}dx_1|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta} = |f|^{p_1}_{p_1;\alpha,\beta}|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta} = |f|^{p_2}_{p_1;\alpha,\beta}.$$

Продовжуючи далі, встановимо, що

$$\int\limits_K f(x)g^*(x)dx = \|f\|^{1-p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta} \int\limits_{I_n} |f|^{p_n}_{p_1,\ldots p_{n-1};\alpha,\beta}dx_n = \|f\|^{1-p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta}\|f\|^{p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta} = \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}.$$

Так, ми довели (7), а отже, і (5) доведено.

Тепер покажемо, що функція g^* – єдина, що реалізує точну верхню межу в (5). Припустимо, що існує інша функція $g_0(x)$, що реалізує точну верхню межу в (5). Тоді за (5) і лемою 1 мають міце співвідношення

$$\|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} = \int\limits_K f(x)g_0(x)dx \le \int\limits_K |f(x)g_0(x)|dx \le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}\|g_0\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta}.$$

Отже, всюди повинні бути знаки рівності. Звідки $\|g_0\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1$, майже скрізь на K $\mathrm{sgn} g_0(x) = \mathrm{sgn} f(x)$, і, враховуючи (4), отримуємо

$$|g_0(x)|_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} = C|f|^{p_1-1}_{\alpha,\beta}|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta}\cdots|f|^{p_n-p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}.$$

Отже, майже скрізь на K

$$g_0(x) = C\,|f|^{p_1-1}\,|f|^{p_2-p_1}_{p_1;\alpha,\beta}\cdots|f|^{p_n-p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta}\,\mathrm{sgn}_{\alpha^{p_1},\beta^{p_1}} f(x),$$

де $C = \|f\|^{1-p_n}_{\bar{p};\alpha,\beta}$.

Таким чином, $g_0(x) = g^*(x)$ майже скрізь на K. Це означає, що фунція g^*, яка реалізує точну верхню межу в (5), єдина з точністю до множини міри нуль.

Лему доведено.

Сформулюємо і доведемо тепер основний результат.

Теорема 2. *Нехай $1 < p_i < \infty$, $1 \le i \le n$. Для того щоб поліном $P_m^* \in H_m$ був елементом найкращого (α, β)-наближення у просторі $L_{\bar{p}}(K)$ для функції $f \notin H_m$, необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\int\limits_K P_m(x)g(x)dx = 0, \quad \forall P_m(x) \in H_m,$$

де

$$g(x) = \begin{cases} |f - P_m^*|_{\alpha,\beta}^{p_1-1} |f - P_m^*|_{p_1;\alpha,\beta}^{p_2-p_1} \cdots |f - P_m^*|_{p_1,\dots,p_{n-1};\alpha,\beta}^{p_n-p_{n-1}} \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f - P_m^*), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |f - P_m^*|_{p_1,\dots,p_n} \neq 0, \\ 0, \ |f - P_m^*|_{p_1,\dots,p_n} = 0. \end{cases}$$

Доведення. Достатність. Нехай функція $g(x)$ задовольняє умови теореми. Покажемо, що тоді поліном $P_m^* \in H_m$ є елементом найкращого (α, β)-наближення у просторі $L_{\bar{p}}(K)$ для функції $f \notin H_m$. Аналогічно до доведення леми 2 маємо, що

$$\|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1}\beta^{-1}} = \|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1} \tag{8}$$

і

$$\int\limits_K f(x)g(x)dx = \int\limits_K (f(x) - P_m^*(x))g(x)dx = \|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n}. \tag{9}$$

За лемами 1, 2 і наслідком 1 будемо мати

$$\int\limits_K f(x)g(x)dx \le \|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} \|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1}\beta^{-1}} =$$

$$= \sup_{\|g\|_{\bar{q};\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \int\limits_K f(x)g(x)dx \cdot \|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1} =$$

$$= E_m(f)_{\bar{p};\alpha,\beta} \cdot \|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta}^{p_n-1}.$$

Порівнюючи останню нерівність і (9), доходимо висновку, що

$$\|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta} \le E_m(f)_{\bar{p};\alpha,\beta}.$$

Це означає, що $P_m^*(x)$ — поліном найкращого (α, β)-наближення у просторі $L_{\bar{p}}(K)$ для функції $f \notin H_m$.

Необхідність. Нехай $P_m^*(x)$ — поліном найкращого (α, β)-наближення у просторі $L_{\bar{p}}(K)$ для функції $f \notin H_m$.

Покладемо

$$h(x) = \frac{g(x)}{E_m^{p_n-1}(f)_{\bar{p};\alpha,\beta}}.$$

Враховуючи рівність (8) та вигляд функції g, отримуємо, що:

1)$\|h\|_{\bar{q};\alpha^{-1}\beta^{-1}} = 1$;

2) $\int\limits_K (f(x) - P_m^*(x))h(x)dx = \|f - P_m^*\|_{\bar{p};\alpha,\beta} = E_m(f)_{\bar{p};\alpha,\beta}$.

Але тоді з другої частини теореми 1 і леми 2 випливає, що для $h(x)$, а разом з нею і для $g(x)$ виконується умова

$$\int\limits_K P_m(x)g(x)dx = 0, \quad \forall P_m(x) \in H_m.$$

Теорему повністю доведено.

Бібліографічні посилання

1. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа /А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М., 1972.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближения /Н. П. Корнейчук. — М., 1976.
3. *Смирнов Г. С.* Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой / Г. С. Смирнов // Укр. мат. журн. — 1973. — Т. 25, № 1. — С. 134–138.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
5. *Трактинская В. Н.* Критерий элемента наилучшего несимметричного приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой / В. Н. Трактинская // Вісн. ДНУ. Сер.: Математика. —1998. — Вип. 3. — С. 119–122.
6. *Трактинская В. Н.* Характеризация элемента наилучшего интегрального приближения функций многих переменных /В. Н. Трактинская // Вісн. ДНУ. Сер.: Математика. —2007. — Вип. 12. — С. 134–136.

Надійшла до редколегії 1.05.2015