Researches in Mathematics https://vestnmath.dnu.dp.ua
Res. Math. **27**(2), 2019, p. 7–12 ISSN (Print) 2664-4991
doi:10.15421/241909 ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

V.F.Babenko, O.V.Polyakov

* Public Education Institution ʻDnipropetrovsk Regional Physical and Mathematical Boarding Lyceumʻ

On the nonsymmetric approximation of continuous functions in the integral metric

В статті розглядаються функціональні простори $C[a;b]$ - простір неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій $f(x)$, $L_p[a;b]$ $(1 \le p \le \infty)$ - простір сумовних в p-й степені на відрізку $[a;b]$ функцій $f(x)$ з відповідними нормами $\|f\|_C$ і $\|f\|_p$, та добре відомі в теорії апроксимації функціональні класи $H^\omega[a,b]$ - класи неперервних функцій f таких, що $\omega(f,t) \le \omega(t),\ t \ge 0$, де $\omega(f,t)$ - модуль неперервності функції f, $\omega(t)$ - заданий модуль неперервності.

В роботі доведена точна оцінка найкращого несиметричного наближення в інтегральній метриці константами неперервних функцій, які належать функціональним класам $H^\omega[a,b]$. А саме, доведена наступна теорема.

Для всіх $\alpha, \beta > 0$ и кожної $f \in H^\omega[a;b]$ має місце наступна нерівність:

$$\inf_{\eta \in I\!R} \|f-\eta\|^p_{p;\alpha,\beta} \le \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_0^{b-a} \omega^p(t)dt$$

Якщо $\omega(t)$ - опуклий вгоруй модуль неперервності і $p=1$, або $\omega(t)=t$ і $p>1$, тоді отримана нерівність перетворюється у рівність.

Враховуючи відому теорему В.Ф.Бабенко про зв'язок несиметричних наближень з звичайними найкращими наближеннями в інтегральній метриці та односторонніми найкращими наближеннями, з доведенного результата ми отримаемо точну оцінку для звичайного найкращого наближення, отриману Н.П.Корнійчуком, та точну оцінку для найкращого одностороннього наближення, отриману В.Г.Дороніним та О.А.Лігуном.

Отриману нерівність можна застосовувати в різноманітних задачах теорії апроксимації, а саме, в питаннях наближення функцій класу $H^\omega[a,b]$ сплайнами нульового порядку, наближення функцій класу $H^\omega[a,b]$ поліномами за системою Хаара, оцінки інтегральних норм функцій з нульовим середнім значенням на відрізку $[a;b]$, тощо.

Ключові слова: модуль неперервності, несиметричні наближення.

In the paper, an exact estimate of the best nonsymmetric approximation in the integral metric by the constants of continuous functions that belong to the classes $H^\omega[a,b]$ is proved.

Taking into account Babenko's theorem on the connection of nonsymmetric approximation with the usual best approximation in the integral metric and the best one-sided approximations, from the proved result we obtain the exact estimate for the usual best approximation obtained by N.P.Korneichuk, fnd the exact estimate for the best one-sided approximation obtained by V.G.Djrjnin fnd A.A.Ligun.

Key words: modulus of continuity, nonsymmetric approximations.

Let $H^\omega[a,b]$ be the class of functions $f \in C[a;b]$ such that $\omega(f,t) \le \omega(t),\ t \ge 0$. Here $\omega(f,t)$ is the modulus of continuity of a function f and $\omega(t)$ is given modulus of continuity. For $f \in L_p = L_p[a;b]$ $(1 \le p \le \infty)$ and numbers $\alpha > 0, \beta > 0$ we set $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$ and

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} := \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p.$$

If $f \in L_p$ and $H \subset L_p$, then the quantity

$$E(f;H)_{p;\alpha,\beta} = \inf\{\|f-u\|_{p;\alpha,\beta} : u \in H\}$$

is called (see [1]) the best (α,β)-approximation of a function f by a set H in the space L_p . For $\alpha=\beta=1$ we obtain the usual best L_p-approximation of a function f by a set H, which we denote by $E(f,H)_p$.

For $f \in L_p$ we set

$$H^\pm(f) = \{u \in H : \pm u(x) \le \pm f(x), for\ almost\ all\ x \in [a,b]\}.$$

The value

$$E^\pm(f;H)_p = \inf\{\|f-u\|_p : u \in H^\pm(f)\}$$

is called the best L_p -approximation from below $(+)$ and above (-) of a function f by the set H.

It is proved in [1] that if H is a finite-dimensional subspace of the space $L_p,\ 1 \le p < \infty$, then

$$\lim_{\beta\to\infty} E(f,H)_{p;1,\beta} = E^+(f,H)_p \text{ and } \lim_{\alpha\to\infty} E(f,H)_{p;\alpha,1} = E^-(f,H)_p.$$

Our goal is to find for concave $\omega(t)$ the value

$$\sup_{f\in H^\omega[a;b]} \inf_{\eta\in\mathbb{R}} \|f-\eta\|_{p;\alpha,\beta}. \tag{1}$$

For $\alpha=\beta=1$ this problem was solved by N.P.Korneychuk in [2]. For application of his result see [2], [3], [4]. For the case $\max\{\alpha,\beta\}=\infty$ the problem (1) was solved in [5].

Theorem 1. *For any $\alpha,\beta > 0$ and any $f \in H^\omega[a;b]$ the following estimate is valid:*

$$\inf_{\eta\in\mathbb{R}} \|f-\eta\|^p_{p;\alpha,\beta} \le \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_0^{b-a} \omega^p(t)dt \tag{2}$$

If $\omega(t)$ is concave modulus of continuity and $p=1$, or $\omega(t)=t$ and $p>1$, then inequlity (2) is the best possible.

Remark. In the case $\alpha = \beta = 1$ we obtain from (2) Korneqchuk's result [2]. In the case $\min\{\alpha, \beta\} = 1$ and $\max\{\alpha, \beta\} = \infty$ (2) gives result from [5].

Proof. We will use ideas from [2] (see also [3, §4.2]). Taking into account the criterion of the element of the best (α, β)-approximation [1] we see that to prove the theorem it is sufficiently to prove the inequality

$$\sup_{f \in H_0^\omega[a;b]} \int_a^b (\alpha f_+(t) + \beta f_-(t))^p dt \le \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_0^{b-a} \omega^p(f;t)dt \tag{3}$$

where $H_0^\omega[a;b]$ is the set of piecewise linear functions from $H^\omega[a;b]$ without horizontal links, and such that

$$\int_a^b |f(t)|^{p-1}(\alpha^p f_+(t) - \beta^p f_-(t))dt = 0.$$

Lemma 1. *Let $f \in H_0^\omega[a;b]$, $1 \le p < \infty$ and for $a \le t \le b$*

$$F(t) = \int_a^t |f(u)|^{p-1}(\alpha^p \mathrm{sgn} f_+(u) - \beta^p \mathrm{sgn} f_-(u))du + C,$$

where C is an arbitrary constant. Let $f(t) > 0 (< 0)$ almost everywhere on $(a;\gamma)$, and $f(t) < 0 (> 0)$ almost everywhere on $(\delta;b)$, Let also $F(a) = F(b)$, $F(\gamma) = F(\delta)$, and $e = (a;\gamma) \cup (\delta;b)$. Then

$$\int_e (\alpha f_+(t) + \beta f_-(t))^p dt \le \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_{\delta-\gamma}^{b-a} \omega^p(t)dt.$$

Proof of Lemma 1. Let, for definiteness, $f(t) > 0$, $t \in (a;\gamma)$, $f(t) < 0$, $t \in (\delta;b)$. We define on strictly decreasing function $\rho(t)$ by the equality

$$F(t) = F(\rho(t)), \quad a \le t \le \gamma, \;\; \delta \le \rho(t) \le b. \tag{4}$$

We will have also

$$F(\rho^{-1}(t)) = F(t), \quad a \le \rho^{-1}(t) \le \gamma, \;\; \delta \le t \le b. \tag{5}$$

The function $\rho(t)$ and its inverse function $\rho^{-1}(t)$ are absolutely continuous. Differentiating the equalities (4) and (5) we obtain that almost everywhere

$$\alpha^p f_+(t)^{p-1} = -\beta^p f_-(\rho(t))^{p-1} \cdot \rho'(t); \tag{6}$$

$$\beta^p f_-(t)^{p-1} = -\alpha^p f_+(\rho^{-1}(t))^{p-1} \cdot (\rho^{-1}(t)'. \tag{7}$$

Consider

$$\int_e (\alpha f_+(t) + \beta f_-(t))^p dt = \alpha^p \int_a^\gamma f_+(t)^{p-1} f_+(t)dt + \beta^p \int_\delta^b f_-(t)^{p-1} f_-(t)dt.$$

Using (7) and substituting $\rho^{-1}(u)=t$ we will have

$$\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt = \alpha^p(\int_a^\gamma f_+(t)^{p-1}f_+(t)dt - \int_\delta^b f_+(\rho^{-1}(u))^{p-1}(\rho^{-1}(u))' f_-(u)dt)$$

$$= \alpha^p \int_a^\gamma f_+(t)^{p-1}(f_+(t)dt + f_-(\rho(t))dt,$$

and therefore

$$\frac{1}{\alpha}\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt = \alpha^{p-1}\int_a^\gamma f_+(t)^{p-1}(f_+(t)+f_-(\rho(t))dt.$$

Analogously using (6) we obtain

$$\frac{1}{\beta}\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt = \beta^{p-1}\int_\delta^b f_-(t)^{p-1}(f_+(\rho^{-1}(t)+f_-(t))dt.$$

From the last two equalities, we derive

$$(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha})\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt = \int_e(\alpha^{p-1}f_+(t)^{p-1}+\beta^{p-1}f_-(t)^{p-1})\psi(t)dt,$$

where

$$\psi(t)=\begin{cases} f_+(t)+f_-(\rho(t)), & a\le t\le\gamma;\\ f_+(\rho^{-1}(t))+f_-(t), & \delta\le t\le b.\end{cases}$$

Applying Hölder inequality, we get

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \le$$

$$\le \left\{\int_e \left(\alpha^{p-1}f_+(t)^{p-1}+\beta^{p-1}f_-(t)^{p-1}\right)^{p/(p-1)}dt\right\}^{(p-1)/p}\cdot\left\{\int_e\psi(t)^p dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p\,dt\right\}^{(p-1)/p}\cdot\left\{\int_e\psi(t)^p dt\right\}^{1/p}.$$

Therefore

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)^p\int_e(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \le \int_e\psi(t)^p dt.$$

Taking into account the sign of the function $f(t)$ on the intervals $(a;\gamma)$ and $(\delta;b)$, we get

$$\int_e\psi(t)^p dt =$$

$$= \int_a^\gamma(f_+(t)+f_-(\rho(t))^p(1-\rho'(t))dt = \int_a^\gamma(f(t)-f(\rho(t))^p(1-\rho'(t))dt \le$$

$$\leq \int_a^\gamma \omega^p(f;\rho(t)-t)(1-\rho'(t))dt = \int_{\delta-\gamma}^{b-a} \omega^p(f;t)dt.$$

Consequently,

$$\int_e (\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \leq \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_{\delta-\gamma}^{b-a} \omega^p(f;t)dt.$$

Lemma 1 is proved.

Let us finish the proof of Theorem 1. Choose C in definition of the function $F(t)$ such that $F(a)=F(b)=0$. Write a representation of $F(t)$ as sum of simple function (see [6, §6.3]):

$$F(t)=\sum_k F_k(t).$$

Let (a_k,b_k) be intervals such that $|F_k(t)|>0$ on (a_k,b_k), and let $[\gamma_k,\delta_k]$ be intervals such that $|F_k(t)|=\max_u|F_k(u)|$ on $[\gamma_k,\delta_k]$. Suppose that functions F_k are ordered in such a way that lengths $|b_k-a_k|$ decrease. Applying Lemma 1 to $F=F_k$ we will have that for any k

$$\int_{e_k}(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \leq \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_{\delta_k-\gamma_k}^{b_k-a_k} \omega^p(t)dt = \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_{b_k-a_k-|e_k|}^{b_k-a_k} \omega^p(t)dt,$$

where $e_k=[a_k,\gamma_k]\cup[\delta_k,b_k]$ and $|e_k|=\text{meas } e_k$.

We have

$$b_1-a_1\leq b-a,$$

$$b_2-a_2\leq b_1-a_1-|e_1|\leq b-a-|e_1|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_k-a_k\leq b-a-\sum_{j=1}^{k-1}|e_j|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Therefore

$$\int_a^b(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \leq \sum_k \int_{e_k}(\alpha f_+(t)+\beta f_-(t))^p dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \sum_k \int_{b_k-a_k-|e_k|}^{b_k-a_k} \omega^p(t)dt \leq \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \sum_k \int_{b-a-\sum_{j=1}^{k}|e_j|}^{b-a-\sum_{j=1}^{k-1}|e_j|} \omega^p(t)dt$$

$$\leq \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_0^{b-a} \omega^p(t)dt.$$

Inequality (2) is proved.

Let $a = 0, b = 1$, $p > 1$ and $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Consider the function

$$f_0(x) = x - \gamma.$$

Using the criterion of the element of the best (α, β)-approximation [1], it is easy verify that the constant of the best (α, β)- approximation of the function $f_0(x)$ is identically zero. Then

$$\|f_0\|^p_{1;\alpha,\beta} = \int_0^\gamma \beta^p(\gamma - x)^p dx + \int_\gamma^1 \alpha^p(x - \gamma)^p dx =$$

$$= \frac{\alpha^{p+1}\beta^p}{(p+1)(\alpha+\beta)^p} + \frac{\alpha^p\beta^{p+1}}{(p+1)(\alpha+\beta)^p} = \frac{1}{p+1}\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p = \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^p \int_0^1 \omega^p(f;t)dt.$$

Now let $p = 1$ and $\omega(t)$ be a concave modulus of continuity. We put $\rho(t) = 1 - \frac{\beta}{\alpha}t$, $t \in [0;\gamma]$ and consider the function

$$f_0(x) = \begin{cases} -\int_x^\gamma \omega'(\rho(t) - t)dt, & 0 \le x \le \gamma; \\ \int_\gamma^x \omega'(t - \rho^{-1}(t))dt, & \gamma \le x \le 1. \end{cases}$$

As in the previous case, using the criterion of the element of the best (α, β)-approximation [1], it is easy to verify that the constant of the best (α, β)-approximation of the function $f_0(x)$ is identically zero. By direct integration, we see that

$$\|f_0\|_{1;\alpha,\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\int_0^1 \omega(t)dt.$$

Theorem is proved.

References

1. Бабенко В.Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций// Украинский математический журнал - 1982.- 34, N4. - С. 409-416.
2. Корнейчук Н.П. О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p //Мат. заметки. - 1971. - 10, N5. - С.493 - 500.
3. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. - М.: Наука, 1984. - 452 с.
4. Хорошко Н.П. О наилучшем приближении функций класса $H_\omega[0;1]$ полиномами по системе Хаара в метрике L_p //Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. - Днепропетровск: ДГУ, 1972. - С.74-76.
5. Доронин В.Г., Лигун А.А. К вопросу о наилучшем приближении некоторых классов непрерывных функций //Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. - Днепропетровск: ДГУ, 1974. - С.42-49.
6. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

Received: 2.11.2019. *Accepted:* 20.12.2019