Researches in Mathematics
Res. Math. **27**(2), 2019, p. 32–35
doi:10.15421/241912

https://vestnmath.dnu.dp.ua
ISSN (Print) 2664-4991
ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

O.V. Polyakov*

* Public Education Institution ʹDnipropetrovsk Regional Physical and Mathematical Boarding Lyceumʹ

On Turan-type inequalities for trigonometric polynomials of half-integer order

Нерівностями типу Турана називаються нерівності виду $\|f^{(k)}\|_X = C_n\|f\|_X$, де f - алгебраїчний, або тригонометричний поліном степені n,X - деякий нормований простір, C_n - деяка константа, що залежить від n. Існують різноманітні точні нерівності типу Турана для алгебраїчних та тригонометричних поліномів при певних умовах, що накладаються на нулі відповідних поліномів. Зокрема, для тригонометричних поліномів $\tau(x)$, степені n, всі $2n$ коренів якого є дійсними та всі корені розташовані на проміжку $[0; 2\pi)$, виконуються нерівності $\|\tau''\|_C \geq \frac{n}{2}\|\tau\|_C$, та $\|\tau'\|_{L_2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\|\tau\|_{L_2}$, де C - простір неперервних 2π-періодичних функцій, L_2 - простір сумовних в квадраті 2π-періодичних функцій з відповідними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{L_2}$. Причьому ці нерівності неможливо покращити. При доведенні цих нерівностей використовувалось представлення тригонометричних поліномів степені n, всі корені якого дійсні та розташовані на періоді.

Тригонометричним поліномом напівцілого порядку $n + \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$ називається функція виду

$$h(x) = h_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x + d_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right).$$

В статті отримані деякі точні нерівності типу Турана для тригонометричних поліномів $h(x)$ напівцілого порядку $n + \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$, всі $2n + 1$ корені якого є дійсними та розташовані на проміжку $[0; 2\pi)$. А саме, нерівність, що пов'язує норми в просторі C тригонометричного полінома $h(x)$ напівцілого порядку $n + \frac{1}{2}$ $n = 1, 2, ...$ та його другої похідної $h''(x)$, тобто $\|h''\|_c \geq \frac{2n+1}{4}\|h\|_c$, а також нерівність, що пов'язує норми в просторі L_2 тригонометричного полінома $h(x)$ напівцілого порядку $n + \frac{1}{2}$ $n = 1, 2, ...$ та його першої похідної $h'(x)$, тобто $\|h'\|_{L_2} \geq \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\|h\|_{L_2}$. Отримані нерівності покращити неможливо. При доведенні теорем використовується метод, що було розроблено В.Ф.Бабенко та С.О.Пічуговим для тригонометричних поліномів, всі корені яких дійсні.

Ключові слова: тригонометричні поліноми, норми, нерівності.

Some exact inequalities of the Turan type are obtained in the paper for trigonometric polynomials $h(x)$ of half-interger order $n+\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$, all $2n+1$ of wich are zeros are real and are located on a segment $[0; 2\pi)$. Namely, the inequality that relates the norms in the space C of the trigonometric polynomials $h(x)$ of half-interger order $n+\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$, and its second derivative $h''(x)$, $\|h''\|_c \geq \frac{2n+1}{4}\|h\|_c$, that is the inequalities that connects the norms in the space L_2 of the trigonometric polynomials $h(x)$ of half-interger order $n + \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$, and its first derivative $h'(x)$, that is $\|h'\|_{L_2} \geq \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\|h\|_{L_2}$. The resulting

inequalities cannot be improved. In proving the theorems, we use the metod that was developed by V.F.Babenko and S.A.Pichugov for trigonometric polynomials, fll of whose roots are real.

Key words: trigonometric polynomials, norms, inequalities.

Inequalities of Turan-type will be called of the fom $\|f^{(k)}\|_X = C_n\|f\|_X$, where f be algebraic ore trigonometric polynomial, X - some normalized space, C_n - some constant depending on n.

P.Turan [1] proved that for an algebraic polynomial $p(x)$ of degree n, all zeros of witch are contained in the interval $[-1;1]$, the inequality

$$\|p'\|_{C_{[-1;1]}} \geq \frac{\sqrt{n}}{6}\|p'\|_{C_{[-1;1]}}$$

In the book [2], chapter 5, all possible Turan-type inequalities for algebraic and trigonometric polynomials are cosidered. In particular, the following statements are tru (see also [3])

Theorem 1. *If the trigonometric polynomial $\tau(x)$ of order n, $n = 1, 2, ...$, has (with multiplicities) $2n$ zeros on the interval $[0; 2\pi)$, then*

$$\|\tau''\|_C \geq \frac{n}{2}\|\tau\|_C.$$

In this case, equality is perfomed only for polynomials

$$\tau_0(x) = a\left(\sin\frac{x-\gamma}{2}\right), \quad a, \gamma \in R.$$

Theorem 2. *For any trigonometric polynomial $\tau(x)$,of degree n,all the roots of wich are real, the inequality holds*

$$\|\tau'\|_{L_2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\|\tau\|_{L_2}$$

Moreover this inequality cannot be improved in the sense that

$$\sup_n \sup_\tau \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{\|\tau\|_{L_2}}{\|\tau'\|_{L_2}} = 1$$

The main goal of this paper is to extend theorems 1 and 2 to trigonometric polynomials of half-interger order.

Definition ([4]). The function of the form

$$h(x) = h_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(c_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right), \qquad (1)$$

wile be called a trigonometric polynomial of half-interger order $n + \frac{1}{2}$.

The are such statements

Theorem 3. *Let $h(x)$ be a triginometric polynomias of half-inerger order $n+\frac{1}{2}$, wich $c_n+id_n \neq 0$, $c_n-id_n \neq 0$, and wich has $2n+1$ zeros on the interval $[0;2\pi)$ (taking into account multiplicities). Then there is inequality*

$$\|h''\|_c \geq \frac{2n+1}{4}\|h\|_c$$

Moreover, this inequality turns into equality only for polynomials $h_0(x) = B\left(\sin\frac{x-\gamma}{2}\right)^{2n+1}$.

Theorem 4. *Let $h(x)$ be a triginometric polynomial of half-inerger order $n+\frac{1}{2}$, wich $c_n+id_n \neq 0$, $c_n-id_n \neq 0$, angd all roots of wich are real. Then there is an inequality*

$$\|h'\|_{L_2} \geq \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\|h\|_{L_2}.$$

Inequality cannot be improved in understanding

$$\sup_n \sup_h \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\frac{\|h\|_{L_2}}{\|h'\|_{L_2}} = 1.$$

Theorems are proved by the method of work [2-3].

Proof of theorem 4. . As known [4, c. 17] a triginometric polynomial $h(x)$ of half-inerger order $n+\frac{1}{2}$ satisfying the conditions of theorem can be represented as

$$h(x) = B\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2},$$

where x_k, $k=0,1,...,2n$ are zeros of polynomial.

If we introduce $\Sigma(x)=\sum_{k=0}^{2n}\operatorname{ctg}\frac{x-x_k}{2}$, it is not difficult to verify that

$$h'(x) = \frac{1}{2}h(x)\Sigma(x), \tag{2}$$

and

$$h''(x) = \frac{1}{2}h'(x)\Sigma(x) + \frac{1}{2}h(x)\Sigma'(x), \tag{3}$$

From equality (1) directly we get

$$h(0)=\sum_{k=0}^{n}c_k,\ \ h(2\pi)=-\sum_{k=0}^{n}c_k,\ \ h'(0)=\sum_{k=0}^{n}d_k\left(k+\frac{1}{2}\right),\ \ h'(2\pi)=-\sum_{k=0}^{n}d_k\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

Consequently $h(2\pi)h'(2\pi)-h(0)h'(0)=0$.

Then, integreting in parts, using equalities (2) and (3), we will have

$$\|h'\|_{L_2}^2 = \int_0^{2\pi}\left(h'(x)\right)^2dx = \int_0^{2\pi}h'(x)h'(x)dx = -\int_0^{2\pi}h(x)h''(x)dx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (h'(x))^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h^2(x)\Sigma'(x)dx.$$

From here

$$2\int_0^{2\pi} (h'(x))^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h^2(x)\Sigma'(x)dx, \tag{4}$$

Insofar as,

$$-\Sigma'(x) = -\sum_{k=0}^{2n}\left(-\frac{1}{sin^2\frac{x-x_k}{2}}\right)\frac{1}{2} \geq \frac{2n+1}{2}$$

than, using equality (4), we will have

$$2\int_0^{2\pi} (h'(x))^2\,dx \geq \frac{2n+1}{4}2\int_0^{2\pi} h^2(x)dx$$

From here

$$\|h'\|_{L_2} \geq \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\|h\|_{L_2}$$

Consider a polynomial $h_0(x) = \sin^{2n+1}\frac{x}{2}$.

Directly calculate

$$\|h_0\|^2_{L_2} = \int_0^{2\pi} \sin^{4n+2}\frac{x}{2} = 2B\left(\frac{4n+3}{2};\frac{1}{2}\right).$$

$$\|h_0'\|^2_{L_2} = \frac{(2n+1)^2}{4}\int_0^{2\pi} \sin^{4n}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{(2n+1)^2}{2}B\left(\frac{4n+1}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Using the properties jf the B-function, we will have

$$\frac{\|h_0\|^2_{L_2}}{\|h_0'\|^2_{L_2}} = \frac{2B\left(\frac{4n+3}{2};\frac{1}{2}\right)}{\frac{(2n+1)^2}{2}B\left(\frac{4n+1}{2};\frac{3}{2}\right)} = \frac{4(4n+1)}{(2n+1)^2}.$$

From here

$$\sqrt{\frac{2n+1}{8}}\frac{\|h_0\|_{L_2}}{\|h_0'\|_{L_2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{8}}\cdot\frac{2\sqrt{4n+1}}{2n+1} = \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} = \sqrt{1-\frac{1}{4n-2}}.$$

The theorem is proved.

References

1. *Turan P.* Uber die Abietung von polynomen //Composito Math, 1939. — 7. — P. 89–95.
2. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. -К. : Науков думка, 1992. — 304 с.
3. *Бабенко В. Ф, Пичугов С. А* О неравенствах для производных полиномов с вещественными нулями //Укр. мат. журн. - 1986. - 38, № 4. - С. 411 - 416.
4. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. - Изд-во "Вышейшая школа 1968. - 318 с.

.

Received: 30.06.2019. *Accepted:* 20.12.2019