Researches in Mathematics
Res. Math. **27**(2), 2019, p. 45–58
doi:10.15421/241914

https://vestnmath.dnu.dp.ua
ISSN (Print) 2664-4991
ISSN (Online) 2664-5009

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко*, О. В. Козиненко, Д. С. Скороходов*****

* Дніпровський національний університет ім. О. Гончара,
Дніпро 49050. *E-mail: babenko.vladislav@gmail.com*
** Дніпровський національний університет ім. О. Гончара,
Дніпро 49050. *E-mail: kozinenkoalex@gmail.com*
*** Дніпровський національний університет ім. О. Гончара,
Дніпро 49050. *E-mail: dmitriy.skorokhodov@gmail.com*

Нерівності типу Карлсона-Тайкова-Шадріна в просторах $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ і $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$

We consider the problem of finding sharp inequalities for the norms of derivatives of the functions. This classical problem arises in Approximation Theory in the beginning of XX century in works of E. Landau, J. Hadamard, G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A thorough overview of many known results and related problems can be found in surveys [1, 2] and the book [3].

Recall that $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$, $r \in \mathbb{N}$ and $\alpha,\beta > -1$, is the space of measurable functions $x : (-1,1) \to \mathbb{R}$ such that $\|x\|_{2,r;\alpha,\beta} := \int_{-1}^{1} |x(t)|^2(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}\,\mathrm{d}t < \infty$, and $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ is the space of measurable functions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\|x\|_{2,e^{-t^2}} := \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$. S. Z. Rafalson [7], S. Z. Rafalson and I. V. Berdnikova [5] obtained analogues of Hardy-Littlewood-Polya inequalities for the norms of derivatives of functions in spaces $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ and $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$. Namely, they established sharp inequalities that estimate $\left\|x^{(k)}\right\|_{2,k;\alpha\beta}$, $k \in \mathbb{N}$ and $0 < k < r$, in terms of $\|x\|_{2,0;\alpha,\beta}$ and $\left\|x^{(r)}\right\|_{2,r;\alpha,\beta}$, and sharp inequalities that estimate $\left\|x^{(k)}\right\|_{2,e^{-t^2}}$ in terms of $\|x\|_{2,e^{-t^2}}$ and $\left\|x^{(r)}\right\|_{2,e^{-t^2}}$.

In this paper we obtain the analogues of Taikov-Shadrin inequalities for the norms of derivatives in spaces $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$ and $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$. Namely, we obtain sharp inequalities that estimate $\left|x^{(k)}(t_0)\right|$, $t_0 \in (-1,1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ and $k < r$, in terms of $\|x\|_{2,0;\alpha,\beta}$ and $\left\|x^{(r)}\right\|_{2,r;\alpha,\beta}$, and sharp inequalities that estimate $\left|x^{(k)}(t_0)\right|$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ and $k < r$, in terms of $\|x\|_{2,e^{-t^2}}$ and $\left\|x^{(r)}\right\|_{2,e^{-t^2}}$.

Key words: Carlson type inequality, Kolmogorov type inequality.

Получены новые точные средне-квадратичные и мультипликативные аналоги неравенств Карлсона-Тайкова-Шадрина, которые оценивают значение производной $|x^{(k)}(t_0)|$ функции $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$, $\alpha,\beta > -1$ и $r \in \mathbb{N}$, в точке $t_0 \in (-1,1)$ порядка $k \in \mathbb{Z}_+$ через $L_{2,0;\alpha,\beta}((-1,1))$-норму функции x и $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$-норму её производной. Аналогичные точные результаты получены также в пространстве $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: Неравенства типа Карлсона, неравенства типа Колмогорова.

Отримані нові точні середньо-квадратичні та мультиплікативні аналоги нерівностей Карлсона-Тайкова-Шадріна, які оцінюють значення похідної $|x^{(k)}(t_0)|$ функції $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$, $\alpha,\beta > -1$ та $r \in \mathbb{N}$, в точці $t_0 \in (-1,1)$ порядку $k \in \mathbb{Z}_+$ через

$L_{2,0;\alpha,\beta}((-1,1))$-норму функції x і $L_{2,r;\alpha,\beta}((-1,1))$-норму її похідної порядку r. Аналогічні точні нерівності отримано також для простору $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$.

Ключові слова: Нерівності типу Карлсона, нерівності типу Колмогорова.

MSC2010: Pri 41A17, Sec 26D10

1. Вступ

Нехай G – дійсна вісь $\mathbb{R}$, інтервал $\mathbb{I} := (-1,1)$ або період $\mathbb{T}$ довжини 2π. Позначимо через $L_p(G)$ простір вимірних функцій $x : G \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_G |x(t)|^p \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\{|x(t)| : t \in G\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ і $1 \leqslant s \leqslant \infty$ через $L_s^r(G)$ позначимо простір функцій $x : G \to \mathbb{R}$, для яких $x^{(r-1)}$ локально абсолютно неперервна і $x^{(r)} \in L_s(G)$. Нехай також $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \cap L_s^r(G)$.

В 1934 р. Ф. Карлсон довів [15], що для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, не всі члени якої є нулями, виконується непокращувана нерівність

$$\Big(\sum_{k=1}^\infty a_k \Big)^4 \leqslant \pi^2 \sum_{k=1}^\infty a_k^2 \sum_{k=1}^\infty k^2 a_k^2. \tag{1.1}$$

Також він отримав інтегральний аналог нерівності (1.1) – нерівність

$$\Big(\int_0^\infty x(t)\mathrm{d}t \Big)^4 \leqslant \pi^2 \int_0^\infty x^2(t)\mathrm{d}t \int_0^\infty x^2(t) t^2 \mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

яка виконується для будь-якої вимірної функції $x : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такої, що $x \in L_2((0,+\infty))$ та $tx(t) \in L_2((0,+\infty))$. Ці нерівності та їх різноманітні узагальнення знайшли численні застосування у багатьох розділах математики. Інтегральні узагальнення нерівності Карлсона були дані в [6]. Як узагальнення нерівностей Карлсона можна розглядати нерівності типу Колмогорова. Нагадаємо, що нерівностями типу Колмогорова називаються нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції через норму самої функції та норму її похідної старшого порядку. Дослідження точних нерівностей для норм похідних розпочинається на початку XX століття в роботах Г.Г. Ґарді і Дж.І. Літлвуда, Е. Ландау і Ж. Адамара. Широкий огляд відомих точних нерівностей типу Колмогорова та їх застосувань можна знайти в [3], [1] та [2].

Для функцій $x \in L_{2,2}^r(G)$, де $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{T}$, добре відома точна нерівність для норм похідних, яка низивається точною нерівністю Ґарді-Літлвуда-Поліа (див. [17]):

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(G)} \leqslant \|x\|_{L_2(G)}^{1-\frac{k}{r}} \|x^{(r)}\|_{L_2(G)}^{\frac{k}{r}}. \tag{1.3}$$

Деякі аналоги нерівності (1.3) були встановлені у роботах С.З. Рафальсона [7] та І.В. Бердникової і С.З. Рафальсона [5]. Сформулюємо отримані ними результати.

Для $\alpha, \beta > -1$ через $L_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ позначимо простір вимірних функцій $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\|x\|_{2,r;\alpha,\beta} := \Big(\int_{-1}^{1} x^2(t)(1-t)^{\alpha+r}(1+t)^{\beta+r}\mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Добре відомо (див. [9]), що система поліномів Якобі $\{J_k^{(\alpha,\beta)}\}_{k=0}^{\infty}$ є ортонормовним базисом простору $L_{2,0;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$. Для зручності, позначимо коефіцієнти Фур'є-Якобі функції $x \in L_{2,0;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ таким чином:

$$c_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, J_k^{(\alpha,\beta)}(t)\,(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Нехай $L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ – простір функцій $x \in L_{2,0;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$, для яких $x^{(r-1)}$ локально абсолютно неперервна і $x^{(r)} \in L_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$.

Теорема А [7]. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ і $0 \leqslant s \leqslant r-1$. Припустимо, що функція $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ задовольняє умову*

$$c_k^{(\alpha,\beta)}(x) = 0, \qquad k = s, s+1, \dots, r-1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|x^{(s)}\|_{2,s;\alpha,\beta} \leqslant & \Big(\frac{\Gamma(r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(2r+\alpha+\beta+1)}\Big)^{\frac{s}{2r}} \times \\ & \times \Big(\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\alpha+\beta+s+1)}{\Gamma(r-s+1)\Gamma(r+\alpha+\beta+1)}\Big)^{\frac{1}{2}} \|x\|^{1-\frac{s}{r}}_{2,0;\alpha,\beta} \|x^{(r)}\|^{\frac{s}{r}}_{2,r;\alpha,\beta}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Нерівність (1.4) *є точною, а знак рівності досягається на функції $x^* = J_r^{(\alpha,\beta)}$.*

Важливим частинним випадком просторів $L_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ є випадок $\alpha = \beta = 0$. Позначимо $L_{2,r}(\mathbb{I}) := L_{2,r;0,0}(\mathbb{I})$, $L^r_{2,r}(\mathbb{I}) := L^r_{2,r;0,0}(\mathbb{I})$ та $\|\cdot\|_{2,r} := \|\cdot\|_{2,r;0,0}$. Поліноми Якобі $\{J_k^{(0,0)}\}_{k=0}^{\infty}$ також відомі як поліноми Лежандра [9].

Наслідок Б [7]. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ і $0 \leqslant s \leqslant r-1$. Припустимо, що функція $x \in L^r_{2,r}(\mathbb{I})$ задовольняє умову*

$$c_k(x) = 0, \qquad k = s, s+1, \dots, r-1.$$

Тоді виконується нерівність

$$\|x^{(s)}\|_{2,s} \leqslant \Big(\frac{1}{\Gamma(2r+1)}\Big)^{\frac{s}{2r}} \Big(\frac{\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r-s+1)}\Big)^{\frac{1}{2}} \|x\|^{1-\frac{s}{r}}_{2,0} \|x^{(r)}\|^{\frac{s}{r}}_{2,r}. \tag{1.5}$$

Нерівність (1.5) *є точною, а знак рівності досягається на функції $x^* = J_r^{(0,0)}$.*

Нехай $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ – простір вимірних функцій $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, що

$$\|x\|_{2,e^{-t^2}} := \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, e^{-t^2}\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Відомо (див. [9]), що система поліномів Ерміта $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормовним базисом простору $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$. Позначимо коефіцієнти Фур'є-Ерміта функції $x\in L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ через

$$a_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, H_k(t) e^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Через $L^r_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ позначимо простір функцій $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, у яких $x^{(r-1)}$ — локально абсолютно неперервна та $x^{(r)}\in L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$. Нехай $L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R}) = L^r_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})\cap L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$.

Теорема B [5]. *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і $0\leqslant s\leqslant r-1$. Припустимо, що функція $x\in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ задовольняє умову*

$$a_k(x) = 0, \qquad k = s, s+1, \dots, r-1. \tag{1.6}$$

Тоді

$$\|x^{(s)}\|_{2,e^{-t^2}} \leqslant \Big(\frac{(r!)^{1-\frac{s}{r}}}{(r-s)!}\Big)^{\frac{1}{2}} \|x\|^{1-\frac{s}{r}}_{2,e^{-t^2}} \|x^{(r)}\|^{\frac{s}{r}}_{2,e^{-t^2}}. \tag{1.7}$$

Нерівність (1.7) є точною, а знак рівності досягається на функції $x^* = H_r$.

Нерівності для похідних, які безпосередньо узагальнюють нерівності Карлсона є нерівності, отримані Л.В. Тайковим [10] та А.Ю. Шадріним [11]. Нагадаємо нерівність Шадріна. Для цього означимо

$$\begin{aligned}
\eta_{r,k} &= \Big(\frac{2r}{2k+1}\Big)^{\frac{2k+1}{4r}} \Big(\frac{2r}{2r-2k-1}\Big)^{\frac{2r-2k-1}{4r}},\\
C_{r,k}(t) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1} n^{2k}}{1+t^{2r}n^{2r}}\Big)^{\frac{1}{2}},\\
C_{r,k} &= \sup_{t>0} C_{r,k}(t).
\end{aligned}$$

Теорема Г [11]. *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і $0\leqslant k\leqslant r-1$. Тоді для будь-якої функції $x\in L^r_2(\mathbb{T})$ такої, що $\int_{\mathbb{T}} x(t)\mathrm{d}t = 0$, для $k=0$, виконується непокращувана нерівність*

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant \xi_{r,k} \|x\|^{\frac{r-k-\frac{1}{2}}{r}}_{L_2(\mathbb{T})} \|x^{(r)}\|^{\frac{k+\frac{1}{2}}{r}}_{L_2(\mathbb{T})}, \tag{1.8}$$

де $\xi_{r,k} = \pi^{-\frac{1}{2}}\eta_{r,k}C_{r,k}$, $\pi^{-\frac{1}{2}}\leqslant \xi_{r,k}\leqslant 1$.

Зробимо декілька зауважень. Співвідношення (1.8) є аналог нерівності Л.В. Тайкова [10] для функцій, визначених на $\mathbb{R}$, з тією лише різницею, що у випадку прямої в виразі для точної константи $\xi_{r,k}$ замість інтегральної суми $C_{r,k}$ стоїть відповідний інтеграл

$$\Big(\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2r}}\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0} C_{r,k}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(r\sin\Big(\frac{2k+1}{2r}\pi\Big)\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

По друге, розглянемо функцію $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(nt + \frac{\pi k}{2}\right)$, де $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність невід'ємних чисел. Тоді

$$\|g^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^k |a_n|, \quad \|g\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \|g^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n^2,$$

і з нерівності (1.8) випливає:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \leqslant \pi^{\frac{1}{2}}\xi_{r,k}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{\frac{r-k-\frac{1}{2}}{2r}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}a_n^2\Big)^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2r}}.$$

У випадку $k = 0$ і $r = 1$ остання нерівність і є нерівністю Карлсона.

Основна мета даної роботи полягає у встановленні аналогів нерівностей Карлсона, Тайкова і Шадріна у просторах $L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ та $L^r_{2,2;e^{-t^2}}(\mathbb{R})$.

2. Нерівності типу Тайкова-Шадріна в просторі $L_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$

В данному розділі отримаємо середньо-квадратичну і мультиплікативну нерівності типу Карлсона для функцій з простору $L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$. Для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ і $r \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\gamma_{n,r,\alpha,\beta} = \begin{cases} 0, & n < r, \\ \Big(\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+r+1)}{\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}, & n \geqslant r. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ *і* $t_0 \in (-1,1)$. *Тоді для будь-якої функції* $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$ *та довільного* $\tau > 0$ *виконується нерівність:*

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant \Big(\|x\|^2_{2,0;\alpha,\beta} + \tau\|x^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{|J^{\alpha+k,\beta+k}_{n-k}(t_0)|^2\,\gamma^2_{n,k,\alpha,\beta}}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Нерівність (2.1) *є точною і обертається в рівність для функції*

$$x^* = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\gamma_{n,k,\alpha,\beta}\,|J^{(\alpha+k,\beta+k)}_{n-k}(t_0)|}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\,J^{(\alpha,\beta)}_n. \tag{2.2}$$

Доведення. Нехай $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$. Тоді

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, J_n^{(\alpha,\beta)}.$$

За узагальненою формулою Родріга для поліномів Якобі [9, с. 107]

$$x^{(k)}(t_0) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0), \tag{2.3}$$

а за рівністю Парсеваля (див. [8, Лемма 4]),

$$\|x\|^2_{2,0;\alpha,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2, \quad \|x^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta} = \sum_{n=r}^{\infty} (c_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2\, \gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}. \tag{2.4}$$

Слідуючи [17, с.367], для $\tau > 0$ застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\begin{aligned}
|x^{(k)}(t_0)| &= |\sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} |c_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\, \gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, |J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)| \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} |c_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\, \gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, |J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)|\, \frac{(1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta})^{\frac12}}{(1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta})^{\frac12}} \\
&\leqslant \Big(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2 + \tau \sum_{n=k}^{\infty} \gamma^2_{n,r,\alpha,\beta} |c_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^2\big)^{\frac12} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{|J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)|^2\, \gamma^2_{n,k,\alpha,\beta}}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\Big)^{\frac12} \\
&\leqslant \Big(\|x\|^2_{2,0;\alpha,\beta} + \tau \|x^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta}\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{|J_{n-k}^{\alpha+k,\beta+k}(t_0)|^2\, \gamma^2_{n,k,\alpha,\beta}}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Знак рівності матиме місце, коли

$$c_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant k-1, \\ \frac{\gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, |J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)|}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}, & n \geqslant k, \end{cases}$$

що відповідає функції x^* в (2.2). Нескладно переконатися (див [9, Теорема 9.1.1]), що ряд (2.2) збігається і функція x^* є аналітичною, а отже $x^* \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$. Тому нерівність (2.1) є точною. Теорема доведена.

У випадку $\alpha = \beta = 0$ теорема 1 приймає такий вигляд.

Наслідок 1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ і $t_0 \in (-1,1)$. Тоді для будь-якої функції $x \in L^r_{2,r}(\mathbb{I})$ та довільного $\tau > 0$ виконується нерівність:*

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant (\|x\|^2_{2,0} + \tau \|x^{(r)}\|^2_{2,r})^{\frac12} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{|J_{n-k}^{(k;k)}(t_0)|^2 \cdot \gamma^2_{n,k;0,0}}{1+\tau\cdot\gamma^2_{n,r;0,0}}\Big)^{\frac12} \tag{2.5}$$

Нерівність (2.5) *є точною і обертається в рівність на функції*

$$x^* = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\gamma_{n,k;0,0}\, J_{n-k}^{(k;k)}(t_0)}{1+\tau\,\gamma_{n,r;0,0}^2} J_n^{(0;0)}. \tag{2.6}$$

Ще одним наслідком теореми 1 на випадок класів, розглянутих С.З. Рафальсоном (див. Теорему A) є наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ *і* $t_0 \in (-1,1)$. *Тоді для будь-якої функції* $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$, *що задовольняє умову*

$$c_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0, \qquad n = k, k+1, \ldots, r-1,$$

та довільного $\tau > 0$ *виконується нерівність:*

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant \Big(\|x\|^2_{2,0;\alpha,\beta} + \tau \|x^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta}\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{n=r}^{\infty} \frac{|J_{n-k}^{\alpha+k,\beta+k}(t_0)|^2\, \gamma^2_{n,k,\alpha,\beta}}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\Big)^{\frac12}. \tag{2.7}$$

Нерівність (2.7) *є точною і обертається в рівність для функції*

$$x^* = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\gamma_{n,k,\alpha,\beta}\, |J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t_0)|}{1+\tau\,\gamma^2_{n,r,\alpha,\beta}}\, J_n^{(\alpha,\beta)}. \tag{2.8}$$

Доведення наслідку 2 є цілком аналогічне доведенню теореми 1. Необхідно лише враховувати рівність нулю коефіцієнтів Фур'є-Якобі $c_n^{(\alpha,\beta)}(x), n = k, \ldots, r-1$.

Застосуємо метод Шадріна [11, Теорема 1] для отримання мультиплікативної нерівності з нерівності (2.7).

Теорема 2. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ *і* $t_0 \in (-1,1)$. *Тоді для будь-якої функції* $x \in L^r_{2,r;\alpha,\beta}(\mathbb{I})$, *яка задовольняє умову*

$$c_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0, \qquad n = k, k+1, \ldots, r-1,$$

виконується точна нерівність:

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant \Big(\sup_{h>0} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h)\Big)\, \theta_{r,k}\, \|x\|_{2,0;\alpha,\beta}^{\frac{r-k-\frac12}{r}}\, \|x^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}^{\frac{k+\frac12}{r}}, \tag{2.9}$$

де

$$\begin{aligned} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h) &= \Big(\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\gamma^2_{n,k;\alpha,\beta}\, J_{n-k}^{(\alpha+k;\beta+k)}(t_0)^2\, h^{2k+1}}{1+h^{2r}\,\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}}\Big)^{\frac12}, \\ \theta_{r,k} &= \Big(\frac{2r}{2k+1}\Big)^{\frac{2k+1}{4r}} \Big(\frac{2r}{2r-2k-1}\Big)^{\frac{2r-2k-1}{4r}}. \end{aligned}$$

Доведення. Підставивши $\tau = h^{2r}$, в нерівність (2.1), перепишемо її у вигляді:

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h)\Big(\|x\|^2_{2,0;\alpha,\beta}\, h^{-2k-1} + \|x^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta}\, h^{2r-(2k+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки $x \notin \mathcal{P}_{r-1}$, то $\|x^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta} \neq 0$. Підставляючи в останню нерівність $h = h^* = \left(\frac{2k+1}{2r-(2k+1)}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{\|x\|_{2,0;\alpha,\beta}}{\|x^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}}\right)^{\frac{1}{r}}$, отримаємо:

$$\begin{aligned}|x^{(k)}(t_0)| &\leqslant C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h^*)\,\theta_{r,k}\,\|x\|^{\frac{r-k-\frac{1}{2}}{r}}_{2,0;\alpha,\beta}\,\|x^{(r)}\|^{\frac{k+\frac{1}{2}}{r}}_{2,r;\alpha,\beta}\\ &\leqslant \sup_{h>0} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h)\,\theta_{r,k}\,\|x\|^{\frac{r-k-\frac{1}{2}}{r}}_{2,0;\alpha,\beta}\,\|x^{(r)}\|^{\frac{k+\frac{1}{2}}{r}}_{2,r;\alpha,\beta},\end{aligned}$$

що і завершує доведення нерівності (2.9).

Покажемо, що нерівність (2.9) є точною. Для будь-якого $h > 0$ розглянемо функцію

$$g_h = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\gamma_{n,k;\alpha,\beta} J^{(\alpha+k;\beta+k)}_{n-k}(t_0)}{1 + h^{2r}\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}} J^{(\alpha;\beta)}_n. \tag{2.10}$$

За рівністю (2.4):

$$\begin{aligned}\|g_h^{(r)}\|^2_{2,r;\alpha,\beta} &= \sum_{n=r}^{\infty}\Big(\frac{J^{(\alpha+k;\beta+k)}_{n-k}(t_0)\gamma_{n,k;\alpha,\beta}}{1+h^{2r}\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}}\Big)^2\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}\\ &= \frac{1}{h^{2r}}\Big(\sum_{n=r}^{\infty}\frac{J^{(\alpha+k;\beta+k)}_{n-k}(t_0)\gamma_{n,k;\alpha,\beta}}{1+h^{2r}\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}} J^{(\alpha+k;\beta+k)}_{n-k}(t_0)\gamma_{n,k;\alpha,\beta} - \sum_{n=r}^{\infty}\Big(\frac{J^{(\alpha+k;\beta+k)}_{n-k}(t_0)\gamma_{n,k;\alpha,\beta}}{1+h^{2r}\gamma^2_{n,r;\alpha,\beta}}\Big)^2\Big)\\ &= \frac{1}{h^{2r}}(g_h^{(k)}(t_0) - \|g_h\|^2_{2,0;\alpha,\beta}).\end{aligned}$$

Тому:

$$\frac{g_h^{(k)}(t_0)}{\|g_h\|^{2-\frac{2k+1}{r}}_{2,0;\alpha,\beta}\,\|g_h^{(r)}\|^{\frac{2k+1}{r}}_{2,r;\alpha,\beta}} = \Big(\frac{\|g_h^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}}{\|g_h\|_{2,0;\alpha,\beta}}\Big)^{-\frac{2k+1}{r}} + h^{2r}\Big(\frac{\|g_h^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}}{\|g_h\|_{2,0;\alpha,\beta}}\Big)^{2-\frac{2k+1}{r}}.$$

Використовуючи вагову нерівність Коші:

$$\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha+\beta} \geqslant a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \quad a, b \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0,$$

з $a = \dfrac{h^{-(2k+1)}}{2r-(2k+1)}\Big(\dfrac{\|g^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}}{\|g\|_{2,0;\alpha,\beta}}\Big)^{-\frac{2k+1}{r}}$ та $b = \dfrac{h^{2r-(2k+1)}}{2k+1}\Big(\dfrac{\|g^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}}{\|g\|_{2,0;\alpha,\beta}}\Big)^{2-\frac{2k+1}{r}}$ і коефіцієнтами $\alpha = 2r-(2k+1)$ та $\beta = 2k+1$, отримаємо нерівність

$$\frac{g_h^{(k)}(t_0)}{\|g_h\|^{2-\frac{2k+1}{r}}_{2,0;\alpha,\beta}\,\|g_h^{(r)}\|^{\frac{2k+1}{r}}_{2,r;\alpha,\beta}} \geqslant h^{2k+1}\theta^2_{r,k}.$$

Домноживши ліву і праву частину останньої нерівності на $g_h(t_0)$, та врахувавши (2.3), отримаємо

$$\frac{|g_h^{(k)}(t_0)|^2}{\|g_h\|_{2,0;\alpha,\beta}^{2-\frac{2k+1}{r}}\,\|g_h^{(r)}\|_{2,r;\alpha,\beta}^{\frac{2k+1}{r}}} \geqslant h^{2k+1}\theta_{r,k}^2 \sum_{n=r}^{\infty} \frac{J_{n-k}^{(\alpha+k;\beta+k)}(t_0)\gamma_{n,k;\alpha,\beta}}{1+h^{2r}\gamma_{n,r;\alpha,\beta}^2}\gamma_{n,k;\alpha,\beta}\, J_{n-k}^{(\alpha+k;\beta+k)}(t_0)$$
$$= \theta_{r,k}^2 C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}^2(h).$$

Обираючи в (2.10) послідовність $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ таким чином, щоб $C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h_m) \to \sup\limits_{h>0} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h), m \to \infty$, завершуємо доведення точності нерівності (2.9).

Можна стверджувати, що константа в нерівності (2.9) є скінченною для широкого діапазону параметрів α, β, k, r та t_0. Більш строго, має місце наступне твердження

Твердження 1. Нехай $t_0 \in (-1,1)$, $r \in \mathbb{N}$ та $\alpha, \beta > -1$, якщо $k \in \mathbb{N}$ та $\alpha, \beta \geqslant -\frac{1}{2}$, якщо $k = 0$. Тоді

$$\sup_{h>0} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h) < +\infty.$$

Доведення. У роботі [16, Теорема 1] для будь-якого $t \in (-1,1)$, $\alpha, \beta \geqslant -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ було доведено нерівність

$$(1-t^2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}}J_n^{(\alpha,\beta)}(t) \leqslant C'(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

де константа $C' > 0$ не залежить від t, a, b і n. Оскільки $\alpha + k \geqslant 0$ і $\beta + k \geqslant 0$, з нерівності (2.11) отримаємо:

$$|J_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(t)|^2 \leqslant (C')^2 \frac{(\sqrt{(\alpha+k)^2+(\beta+k)^2}+2)^{\frac{1}{2}}}{(1-t)^{\alpha+k+\frac{1}{2}}(1+t)^{\beta+k+\frac{1}{2}}}. \tag{2.12}$$

Нескладно бачити, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}, n \geqslant r$, виконуються нерівності

$$\gamma_{n,k;\alpha,\beta}^2 = n(n-1)\dots(n-k+1)(n+\alpha+\beta+k)\dots(n+\alpha+\beta+1)$$
$$\leqslant n^k(n+\alpha+\beta+k)^k \leqslant (\alpha+\beta+2)^k n^{2k},$$

$$\gamma_{n,r;\alpha,\beta}^2 \geqslant (n-r+1)^r(n+\alpha+\beta+1)^r \geqslant \frac{n^r}{r^r}(n-1)^r \geqslant \frac{n^{2r}}{(2r)^r},$$

Тому, для будь-якого $h > 0$ та $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r$,

$$\frac{\gamma_{n,k;\alpha,\beta}^2\,|J_{n-k}^{(\alpha+k;\beta+k)}(t_0)|^2\,h^{2k+1}}{1+h^{2r}\,\gamma_{n,r;\alpha,\beta}^2} \leqslant C''\frac{n^{2k}h^{2k+1}}{1+n^{2r}h^{2r}}$$

де константа $C'' > 0$ не залежить від n. Отже,

$$\sup_{h>0} C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h) \leqslant C'' \sup_{h>0} C_{r,k}(h),$$

а скінченність sup в правій частині останньої нерівності доведена в роботі [11](див. теорему Г).

Зауваження 1. З теореми 1 неможливо отримати мультиплікативний аналог. Дійсно, в розглядуваному випадку аналог ряду $C_{r,k,\alpha,\beta,t_0}(h)$ матиме доданок $\gamma^2_{n,k;\alpha,\beta}\,|J_0^{(\alpha+k;\beta+k)}(t_0)|^2\,h^{2k+1}$, який необмежено зростає при $h\to+\infty$. Тому його sup буде нескінченним.

Для $\alpha=\beta=0$ теорему 2 перепишемо у такому вигляді.

Наслідок 3. *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\leqslant k\leqslant r-1$ і $t_0\in(-1,1)$. Тоді для будь-якої функції $x\in L^r_{2,r}((\mathbb{I}))$, яка задовольняє умову*

$$c_n^{(0,0)}(x)=0,\qquad n=k,k+1,\dots,r-1,$$

виконується точна нерівність:

$$|x^{(k)}(t_0)|\leqslant\Big(\sup_{h>0}C_{r,k,0,0,t_0}(h)\Big)\,\theta_{r,k}\,\|x\|_{2,0}^{\frac{r-k-\frac12}{r}}\,\|x^{(r)}\|_{2,r}^{\frac{k+\frac12}{r}},\tag{2.13}$$

де

$$C_{r,k,0,0,t_0}(h)\;=\;\Big(\sum_{n=r}^{\infty}\frac{\gamma^2_{n,k;0,0}\,J_{n-k}^{(k;k)}(t_0)^2\,h^{2k+1}}{1+h^{2r}\,\gamma^2_{n,r;0,0}}\Big)^{\frac12}.$$

3. Нерівності типу Тайкова-Шадріна в просторі $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$

В даному розділі ми отримаємо аналоги нерівності Карлсона для функцій з простору $L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$. Введемо позначення:

$$\beta_{n,k}=\begin{cases}0, & n<k,\\ 2^k n(n-1)\dots(n-k+1), & n\geqslant k.\end{cases}.$$

За властивістю поліномів Ерміта (див. [9]), $\|H_n^{(k)}\|^2_{2,e^{-t^2}}=\beta_{n,k}$ для всіх $k,n\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 3. *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\leqslant k\leqslant r-1$ і $t_0\in\mathbb{R}$. Тоді для будь-якої функції $x\in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ та довільного $\tau>0$ виконується нерівність*

$$|x^{(k)}(t_0)|\leqslant\Big(\|x\|^2_{2,e^{-t^2}}+\tau\|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{H^2_{n-k}(t_0)\,\beta_{n,k}}{1+\tau\beta_{n,r}}\Big)^{\frac12}.\tag{3.1}$$

Нерівність (3.2) *є точною і обертається в рівність на функції*

$$x^*=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{H_{n-k}(t_0)\,\sqrt{\beta_{n,k}}}{1+\tau\beta_{n,r}}\,H_n.\tag{3.2}$$

Доведення. В [4] була доведена абстрактна версія нерівності (3.2) для замкнених операторів, що діють в гільбертовому просторі. Оскільки простір $L_{2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ є гільбертовим простором, то використовуючи позначення з [4, Теорема 1] та обравши $f(x) = x(t_0)$ в якості лінійного функціонала, $Ax = x^{(k)}$ та $Bx = x^{(r)}$ в якості операторів, та підставивши їх в [4, Теорема 1] ми отримаємо твердження теореми 3.

Для класів розглянутих С.З. Рафальсоном та І.В. Бердниковою (див. Теорему B) має місце таке твердження.

Наслідок 4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді для будь-якої функції $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$, що задовольняє умову*

$$a_n(f) = 0, \qquad n = k, k+1, \ldots, r-1,$$

та довільного $\tau > 0$ виконується нерівність

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant \Big(\|x\|^2_{2,e^{-t^2}} + \tau \|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=r}^{\infty} \frac{H^2_{n-k}(t_0)\,\beta_{n,k}}{1+\tau\beta_{n,r}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Нерівність (3.3) є точною і обертається в рівність на функції

$$x^* = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{H_{n-k}(t_0)\,\sqrt{\beta_{n,k}}}{1+\tau\beta_{n,r}}\, H_n. \tag{3.4}$$

Доведення наслідку 4 є аналогічним доведенню теореми 3.

Отримаємо мультиплікативну нерівність з нерівності (3.3).

Теорема 4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді для будь-якої функції $x \in L^r_{2,2,e^{-t^2}}(\mathbb{R})$ що задовольняє умову*

$$a_n(f) = 0, \qquad n = k, k+1, \ldots, r-1,$$

виконується нерівність

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant \Big(\sup_{h>0} B_{r,k,t_0}(h)\Big)\, \psi_{r,k}\, \|x\|^{\frac{r-k-1}{r}}_{2,e^{-t^2}}\, \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1}{r}}_{2,e^{-t^2}}, \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned} B_{r,k,t_0}(h) &= \Big(\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\beta_{n,k}\,|H_{n-k}(t_0)|^2\, h^{k+1}}{1+h^r\,\beta_{n,r}}\Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \psi_{r,k} &= \Big(\frac{r}{k+1}\Big)^{\frac{k+1}{2r}} \Big(\frac{r}{r-k-1}\Big)^{\frac{r-k-1}{2r}}. \end{aligned}$$

Доведення. Підставивши $\tau = h^r$, перепишемо нерівність (3.1) у вигляді:

$$|x^{(k)}(t_0)| \leqslant B_{r,k,t_0}(h)\Big(\|x\|^2_{2,e^{-t^2}}\, h^{-k-1} + \|x^{(r)}\|^2_{2,e^{-t^2}}\, h^{r-k-1}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

За умовою теореми $\|x^{(r)}\|_{2,e^{-t^2}} \neq 0$. Підставляючи в останню нерівність $h = h^* = \left(\frac{k+1}{r-k-1}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\|x\|_{2,e^{-t^2}}}{\|x^{(r)}\|_{2,e^{-t^2}}}\right)^{\frac{2}{r}}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(t_0)| &\leqslant \psi_{r,k}\, B_{r,k,t_0}(h^*)\, \|x\|^{\frac{r-k-1}{r}}_{2,e^{-t^2}}\, \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1}{r}}_{2,e^{-t^2}} \\ &\leqslant \Big(\sup_{h>0} B_{r,k,t_0}(h)\Big)\, \psi_{r,k}\, \|x\|^{\frac{r-k-1}{r}}_{2,e^{-t^2}}\, \|x^{(r)}\|^{\frac{k+1}{r}}_{2,e^{-t^2}}. \end{aligned}$$

Покажемо, що нерівність (3.5) є точною. Для $h > 0$ розглянемо функцію

$$g_h = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{H_{n-k}(t_0)\sqrt{\beta_{n,k}}}{1 + h^{2r}\beta_{n,r}} H_n. \tag{3.6}$$

Повторюючи ідею доведення точності нерівності (2.9), отримаємо нерівність

$$\frac{|g_h^{(k)}(t_0)|^2}{\|g_h\|^{2-\frac{2k+2}{r}}_{2,e^{-t^2}}\, \|g_h^{(r)}\|^{\frac{2k+2}{r}}_{2,e^{-t^2}}} \geqslant h^{k+1}\psi^2_{r,k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{H_{n-k}(t_0)\sqrt{\beta_{n,k}}}{1 + h^r\beta_{n,r}} \sqrt{\beta_{n,k}}\, H_{n-k}(t_0) = \psi^2_{r,k} B^2_{r,k,t_0}(h).$$

Обираючи в (3.6) послідовність $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ таким чином, щоб $B_{r,k,t_0}(h_m) \to \sup\limits_{h>0} B_{r,k,t_0}(h), m \to \infty$, ми завершуємо доведення точності оцінки.

Далі, покажемо, що константа $B_{r,k,t_0}(h)$ є скінченою для всіх допустимих значень параметрів r, k, t_0.

Твердження 2. Для будь-якого $t_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ при $k < r$ виконується нерівність

$$\sup_{h>0} B_{r,k,t_0}(h) < +\infty.$$

Доведення. З роботи [14, Теорема 1] слідує, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$:

$$\max_{t\in\mathbb{R}} H_n^2(t)e^{-t^2} \leqslant C_1 n^{-\frac{1}{6}},$$

звідки випливає, що

$$H^2_{n-k}(t_0) \leqslant C_1 e^{t_0^2} n^{-\frac{1}{6}},$$

Нескладно бачити, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}, n \geqslant r$, виконуються нерівності

$$\beta_{n,k} = 2^k n(n-1)\ldots(n-k+1) < 2^k n^k,$$

$$\beta_{n,r} \geqslant 2^r (n-r+1)^r > \left(\frac{2}{r}\right)^r n^r.$$

Тому, для будь-якого $h>0$ та $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r$,

$$\frac{\beta_{n,k}\, |H_{n-k}(t_0)|^2\, h^{k+1}}{1+h^r\, \beta_{n,r}} < C_0 \frac{n^{k-\frac{1}{6}} h^{k+1}}{1+n^r h^r},$$

де константа $C_0>0$ не залежить від n. Використовуючи ідеї роботи [11], покажемо, що $\sup\limits_{h>0} A_{r,k}(h) < +\infty$, де $A_{r,k}(h) = \sum\limits_{n=r}^{\infty} \frac{n^{k-\frac{1}{6}} h^{k+1}}{1+n^r h^r}$. Дійсно, для $h \geqslant 1$ маємо

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{n^{k-\frac{1}{6}} h^{k+1}}{1+n^r h^r} < \frac{1}{h^{r-k-1}} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n^{r-k+\frac{1}{6}}} \leqslant \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n^{r-k+\frac{1}{6}}} < +\infty,$$

оскільки $r-k+\frac{1}{6} > 1$.

Функція $\frac{x^{k-\frac{1}{6}}}{1+x^r}$ має рівно один максимум на $(0,+\infty)$. Тому для $h \in (0,1)$ маємо

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{n^{k-\frac{1}{6}} h^{k+1}}{1+n^r h^r} < \sum_{n=r}^{\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{(nh)^{k-\frac{1}{6}}}{1+(nh)^r} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{6}}}{1+t^r} \mathrm{d}t + h \sup_{t>0} \frac{t^{k-\frac{1}{6}}}{1+t^r}$$

$$< \int_0^1 t^{k-\frac{1}{6}} \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{r-k+\frac{1}{6}}} \mathrm{d}t + 1 < +\infty.$$

Отже, поєднуючи останні дві нерівності отримаємо:

$$\sup_{h>0} B_{r,k,t_0}(h) < C_0 \sup_{h>0} A_{r,k}(h) < +\infty.$$

Зауваження 2. З теореми 3 неможливо отримати мультиплікативний аналог нерівності (3.5). Дійсно, в розглядуваному випадку аналог ряду $B_{r,k,t_0}(h)$ матиме доданок $\beta_{n,k} H_0^2(t_0) h^{k+1}$, який необмежено зростає при $h \to +\infty$. Тому його sup на $(0,+\infty)$ буде нескінченним.

Бібліографічні посилання

1. *Арестов В.В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов, Матем. – 1995. – С.42–68. English translation in Russian Math. (Iz. VUZ), 1995. – P.38–63.
2. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // УМН. — 1996. — С.89-124.
3. *Н*еравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов // К.: Наукова думка, 2003. — 590 с.

4. *Бабенко В.Ф.* О неулучшаемых неравенствах типа Колмогорова для операторов в гильбертовых пространствах / В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун, А.А. Шумейко // Вiсник ДНУ. — 2006. — С.9-13.
5. *Бердникова И.В.* Некоторые неравенства между нормами функции её производных в интегральных метриках / И.В. Бердникова, С.З. Рафальсон // Изв. высших уч. заведений. — 1985. — С.3-6.
6. *Левин В.И.* Точные константы в неравенствах типа Карлсона / В.И. Левин // ДАН СССР. — 1948. — С.635-638.
7. *Рафальсон С.З.* Одно неравенство между нормами функции и ее производных в интегральных метриках / С.З. Рафальсон // Матем. заметки. – 1983. – С.77-82.
8. *Р*афальсон С. З. О приближении функций суммами Фурье-Якоби / С. З. Рафальсон // Изв. вузов, Матем. – 1968. – С.54–62.
9. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё // М. — 1962. —- 500 с.
10. *Тайков Л.В.* Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования / Л.В. Тайков // Мат. заметки. — 1968. — С.233-238.
11. *Шадрин А.Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических класов W_2^m / А.Ю. Шадрин // Мат. заметки. — 1990. — С.132-139.
12. *Babenko V.F.* Comparison of rearrangement and Kolmogorov-Nagy type inequalities for periodic functions / V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov // Aproximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov (B. Bojanov, Ed). — Darba, Sofia, 2002. — P. 24-53.
13. *Babenko V.F.* On Exact Inequalities of Hardy–Littlewood–Polya Type / V.F. Babenko, T.M. Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 2000. — №245. — P. 570–593.
14. *Bonan S.S.* Estimates of the Hermite and the Freud polynomials / S.S. Bonan, D.S. Clark. // Journal of Approximation Theory. — 1990. — №63. — P. 210-224.
15. *Carlson F.* Une inegalite / F. Carlson // Ark. Mat. Astr. Fysik 25B. —- 1934. — №1.
16. *Erdelyi T.* Generalized Jacobi Weights, Christoffel Functions, and Jacobi Polynomials / T. Erdelyi, A.P. Magnus, P. Nevai // SIAM J. Math. Anal. — 1994. — №25(2). — P. 602–614.
17. *Hardy G.H.* Inequlities / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya // Cambridge, 1934.

Received: 01.01.2018. *Accepted:* 20.12.2019