ISSN №9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія «Математика». № 6/1.2010. Вип. 15. С. 28 – 37.

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко*,**, Т.Ю. Лескевич*

**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

***Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИ ИТНЕРПОЛЯЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Знайдене точне значення похибки при інтерполяції полілінійними сплайнами класів функцій багатьох змінних, які визначаються заданим опуклим вверх модулем неперервності.

Ключові слова: полілінійна функція, модуль неперервності, інтерполяція.

Найдено точное значение погрешности при интерполяции полилинейными сплайнами классов функций многих переменных, которые определяются заданым выпуклым вверх модулем непрерывности.

Ключевые слова: полилинейная функция, модуль непрерывности, интерполяция.

The exact value of error of interpolation some classes of multivariate functions, which are determined by given convex upwards majorant of module of continuity, by multilinear splines is obtained.

Key words: multilinear function, module of continuity, interpolation.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$ точек $x = \left(x^1, \dots, x^n\right)$, для которых

$$|x|_q := \sqrt[q]{\sum_{j=1}^{n} \left|x^j\right|^q},$$

где $1 \le q < \infty$ и

$$|x|_\infty := \max_{1 \le j \le n} \left|x^j\right|.$$

Пусть $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n : x^i > 0, i = 1, \dots, n\}$. Элемент $b \in \mathbf{R}^n_+$ определяет в пространстве $\mathbf{R}^n$ n-мерный промежуток

$$P = [0, b] = \prod_{i=1}^{n} [0, b^i].$$

Пусть для каждого $i = 1, \dots, n$ задано разбиение отрезка $[0, b^i]$

$$c_i^0 = 0 < c_i^1 < \dots < c_i^{k_i} = b^i.$$

Промежутки вида

$$M = \prod_{i=1}^{n} [c_i^{j_i - 1}, c_i^{j_i}],\ 0 < j_i \le k_i,\ i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

порождают разбиение T промежутка P.

Пусть $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ полилинейная (n-линейная) функция, то есть функция линейная по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных. Полилинейным сплайном будем называть непрерывную функцию $S: P \to \mathbf{R}$, сужение $S|_M$ которой на произвольный промежуток $M \in T$ совпадает с сужением на M некоторой полилинейной функции $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Полилинейный сплайн однозначно определяется своими значениями в вершинах разбиения T. Произвольной функции $f: P \to \mathbf{R}$ поставим в соответствие полилинейный сплайн $S(f): P \to \mathbf{R}$ такой, что $S(f)|_{T^0} = f|_{T^0}$, где T^0 – множество вершин разбиения T, то есть $S(f)$ интерполирует f в вершинах разбиения T.

Через $H_P^{\omega,q}$ будем обозначать класс функций $f: P \to \mathbf{R}$ таких, что

$$\forall x, y \in P \quad |f(x) - f(y)| \le \omega\left(|x - y|_q\right),$$

где $\omega(t)$ – заданный выпулый вверх модуль непрерывности, $1 \le q \le \infty$.

Введем следующее обозначение

$$E_T(H) = \sup_{f \in H_P^{\omega,q}} \max_{x \in P} |f(x) - S(f, x)|.$$

Обозначим через $d_q(M)$ – диаметр n-мерного промежутка M, и положим

$$d_q(T) = \max_{M \in T} d_q(M).$$

В [8] в случае функций двух переменных был получен следующий результат:

$$E_T\left(H_P^{\omega,2}\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_2(T)\right).$$

Другие известные результаты об отклонении интерполяционных линейных и полилинейных сплайнов на классах функций двух и большего числа переменных приведены в [1 – 4; 6 – 10].

В данной работе получены точные значения отклонения интерполяционных полилинейных сплайнов на классах функций $H_P^{\omega,q}$, $1 \le q \le 3$, и $H_P^{\omega,\infty}$.

Теорема 1. *Если* $\omega(t)$ *– выпулый вверх модуль непрерывности, то для* $1 \le q \le 3$ *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,q}\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_q(T)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный n-мерный промежуток $M \in T$. Не нарушая общности, будем считать, что в выбранной системе координат промежуток M имеет вид:

$$M = \prod_{i=1}^{n} [0, \overline{x}^i].$$

Каждой вершине этого промежутка поставим в соответствие множество $J \subset \{1,2,\dots,n\}$, которое содержит номера нулевых координат данной вершины, и через J' обозначим дополнение множества J до множества $\{1,2,\dots,n\}$, то есть множество номеров ненулевых координат данной вершины. Вершину промежутка M, которой соответствует множество J, будем обозначать через x_J.

Для каждого $J \subset \{1,2,\dots,n\}$ рассмотрим функцию

$$P_J(x) = \frac{1}{V} \prod_{i \in J} \left(\overline{x}^i - x^i\right) \prod_{j \in J'} x^j,$$

где $V = \prod_{i=1}^{n} \overline{x}^i$ – объем промежутка M. Функции $P_J(x)$ обладают следующими свойствами:

1. $\forall x \in M \ \ 0 \le P_J(x) \le 1$,
2. $P_{J_1}\left(x_{J_1}\right) = 1$ и $P_{J_1}\left(x_{J_2}\right) = 0$, если $J_2 \ne J_1$,
3. $\forall x \in M \ \ \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} P_J(x) \equiv 1$. (2)

Используя функции $P_J(x)$ сплайн $S(f)$ можно представить в виде

$$S(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} f(x_J) P_J(x). \qquad (3)$$

Рассмотрим

$$\left|f(x) - S(f,x)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} f(x_J) P_J(x)\right|. \qquad (4)$$

Используя (2) и (4), получим

$$\left|f(x) - S(f,x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} \left(f(x) - f(x_J)\right) P_J(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} \left|f(x) - f(x_J)\right| P_J(x) \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} \omega\left(\sqrt[q]{\sum_{p=1}^{n} \left|x_J^p - x^p\right|^q}\right) P_J(x).$$

Поскольку $\omega(t)$ и $\sqrt[q]{t}$ при $1 \le q \le 3$ – выпуклые вверх функции, $\omega(t)$ – возрастающая функция и верно (2), то, применяя неравенство Иенсена, получим

$$\left|f(x)-S(f,x)\right| \le \omega\left(\sqrt[q]{\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\sum_{p=1}^{n}\left|x_J^p - x^p\right|^q P_J(x)}\right). \tag{5}$$

Положим для $x \in M$

$$F_q(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\sum_{p=1}^{n}\left|x_J^p - x^p\right|^q P_J(x). \tag{6}$$

Учитывая (5), будем иметь

$$\max_{x\in M}\left|f(x)-S(f,x)\right| \le \omega\left(\sqrt[q]{\max_{x\in M} F_q(x)}\right). \tag{7}$$

Преобразуем функцию $F_q(x)$, предварительно поменяв порядок суммирования

$$F_q(x)=\frac{1}{V}\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{J:|J|=k,\, p\in J}\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right)\prod_{i\in J,\, i\ne p}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J'} x^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{J:|J|=k,\, p\notin J}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p \prod_{i\in J}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J',\, j\ne p} x^j\right).$$

Обозначим через J_p при $p=1,\dots,n$ множества индексов

$$J_p=\begin{cases} J, & p\notin J \\ J\setminus\{p\}, & p\in J \end{cases}$$

и через J_p' – дополнение J_p до $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{p\}$. Учитывая, что $P_{J_p}(x)=\dfrac{\overline{x}^p}{V}\prod_{i\in J_p}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J_p'} x^j$, и пользуясь свойством (2), последнее равенство можно переписать в виде

$$F_q(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|J_p|=k} P_{J_p}(x) + \left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|J_p|=k} P_{J_p}(x)\right)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right)+\left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p\right)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^{q+1}\left(\left(\frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right)^q+\frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right).$$

Далее воспользуемся неравенством [6, с.334]

$$2^q\left(t^q+t\right)\le\left(1+t\right)^{q+1},\ t\ge 0,\ 0<q\le 3$$

при $t=\dfrac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}$ и $1\le q\le 3$. Получим

$$F_q(x)\le\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^q\,\overline{x}^p}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^{q+1}\left(1+\frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right)^{q+1}=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\overline{x}^p}{2}\right)^q=F_q(\widetilde{x}),$$

где $\widetilde{x}=\left(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n\right)$, $\widetilde{x}^p=\dfrac{\overline{x}^p}{2}$, $p=1,\dots,n$. Значит

$$\max_{x\in M}F_q(x)=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\overline{x}^p}{2}\right)^q=|\widetilde{x}|_q^q,$$

а поскольку $|\widetilde{x}|_q=\dfrac{1}{2}d_q(M)$, то

$$\sqrt[q]{F_q(\widetilde{x})}=\frac{1}{2}d_q(M).$$

Значит, учитывая (7) $\forall f\in H_P^{\omega,q}$

$$\max_{x\in M}|f(x)-S(f,x)|\le\omega\left(\sqrt[q]{F_q(\widetilde{x})}\right)=\omega\left(\frac{1}{2}d_q(M)\right).$$

Поскольку последнее верно для всех промежутков из разбиения T, то

$$\max_{x\in P}|f(x)-S(f,x)|\le\max_{M\in T}\omega\left(\frac{1}{2}d_q(M)\right)=\omega\left(\frac{1}{2}d_q(T)\right).$$

Для завершения доказательства осталось получить оценку снизу для величины $E_T(H_P^{\omega,q})$. Пусть примежуток $\overline{M}$ такой, что $d_q(\overline{M})=d_q(T)$ и x_0 – центр описанного около $\overline{M}$ n-мерного шара относительно $|\cdot|_q$. Построим для $x\in P$ функцию

$$f_0(x)=\begin{cases}\omega\left(\dfrac{1}{2}d_q(T)-|x-x_0|_q\right), & |x-x_0|_q\le\dfrac{1}{2}d_q(T);\\ 0, & |x-x_0|_q>\dfrac{1}{2}d_q(T).\end{cases}$$

Функция $f_0(x)$ принадлежит классу $H_P^{\omega,q}$, поэтому

$$E_T(H_P^{\omega,q})\ge\max_{x\in\overline{M}}|f_0(x)-S(f_0,x)|=\max_{x\in\overline{M}}|f_0(x)|\ge|f_0(x_0)|=\omega\left(\frac{1}{2}d_q(T)\right).$$

Учитывая оценки сверху и снизу, получим $E_T(H_P^{\omega,q})=\omega\left(\dfrac{1}{2}d_q(T)\right)$.

Теорема доказана.

Пусть далее P представляет собой n-мерный куб $P=[0,b]^n$, и пусть задано разбиение каждого отрезка $[0,b]$ точками $a_k=\dfrac{kb}{N}$, $k=0,\dots,N$.

Тогда n-мерные кубы вида $M=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_{k_i-1},a_{k_i}]$, $1\le k_i\le N$, $i=1,\dots,n$ порождают разбиение P.

Теорема 2. *Если* $\omega(t)$ *– выпулый вверх модуль непрерывности, то, в случае* $P=[0,b]^n$, $n\geq 3$, *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\max_{\substack{0\leq x^2\leq\frac{a}{2},\\ x^{i+1}\leq x^i,\ i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Доказательство. Не нарушая общности, рассмотрим тот куб M, который в выбранной системе координат имеет вид:

$$M=\prod_{i=1}^{n}\left[0,\frac{b}{N}\right].$$

Разобъем промежуток M на 2^n-симплексов, определяемых следующими гиперплоскостями:

$$x^1+x^2=\frac{b}{N},\qquad x^{i+1}=x^i,\ i=\overline{1,n-1}.\tag{9}$$

Рассмотрим сначала симплекс M_1, определяемый системой

$$\begin{cases}x^1+x^2\leq\dfrac{b}{N}\\ x^{i+1}\leq x^i,\ i=\overline{1,n-1}.\end{cases}\tag{10}$$

Как и раньше будем использовать представление интерполяционного полилинейного сплайна в виде (3). Учитывая свойство (2), получим следующую оценку

$$|f(x)-S(f,x)|=\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}f(x_J)P_J(x)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}|f(x)-f(x_J)|P_J(x)\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\omega\left(|x-x_J|_\infty\right)P_J(x).\tag{11}$$

Для $x\in M_1$ введем следующее обозначение

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\omega\left(|x-x_J|_\infty\right)P_J(x).\tag{12}$$

Покажем, пользуясь методом математической индукции, что для рассматриваемых x имеет место равенство

$$F(x)=\left(\frac{N}{b}\right)^n\left(\omega\left(x^1\right)\left(\frac{b}{N}-x^1\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{p}\right)x^{p}\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n}\right)x^{n}. \quad (13)$$

Для проверки выполнения базиса индукции при $n=3$ необходимо преобразовать $|x-x_J|_\infty$ с учетом неравенств системы (10) и применить к полученному выражению свойство (2).

Предположение индукции будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}\omega\left(|x-x_Q|_\infty\right)P_Q(x)=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\left(\omega\left(x^1\right)\left(\frac{b}{N}-x^1\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-2}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{p}\right)x^{p}\prod_{i=p+1}^{n-1}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n-1}\right)x^{n-1},$$

где $Q\subset\{1,2,\ldots,n-1\}$.

Разобъем функцию (12) на сумму двух групп слагаемых. Первая группа включает те слагаемые, для которых $n\in J$, в этом случае, с учетом (10), $|x-x_J|_\infty$ не зависит от x^n. Вторая группа включает те слагаемые, для которых $n\notin J$, в этом случае $|x-x_J|_\infty=a-x^n$. Таким образом

$$F(x)=\frac{N}{b}\left(\frac{b}{N}-x^{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}\omega\left(|x-x_Q|_\infty\right)P_Q(x)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n}\right)x^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}P_Q(x).$$

К первой сумме применим предположение индукции, а ко второй – свойство (2), и получим равенство (13). Значит, согласно принципу математической индукции, (13) верно для любого натурального n.

Поскольку $\omega(t)$ – выпуклая вверх функция, то, применив неравенство Иенсена, из (13) получим

$$F(x)\le\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{N}{b}\cdot 2\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{p}\right)x^{p}\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n}\right)x^{n}\le$$

$$\le\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{p}\right)x^{p}\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+$$

$$+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n}\right)x^{n}.$$

Учитывая последнее неравенство и равенство (12), из неравенства (11) получим

$$\max_{x\in M_1}|f(x)-S(f,x)|\le\max_{x\in M_1}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^{i}\right)+\right.$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\Bigg)\le$$

$$\le\max_{\substack{0\le x^2\le\frac{a}{2}\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right)=$$

$$=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n,$$

где $x_0=\left(\frac{a}{2},x_0^2,x_0^3,\ldots,x_0^n\right)$ – экстремальная точка.

Для остальных симплексов, на которые разбивается промежуток M гиперплоскостями (9) тот же результат может быть получен при замене переменных. Поэтому и на всем исходном множестве P имеет место оценка

$$\max_{x\in P}\left|f(x)-S(f,x)\right|\le\max_{\substack{0\le x^2\le\frac{a}{2}\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Для завершения доказательства осталось получить оценку снизу для величины $E_T(H_P^{\omega,\infty})$. Построим для $x\in P$ функцию

$$f_0(x)=\begin{cases}\omega\left(\left|x-x_0\right|_\infty\right), & x\in M_1;\\ 0, & x\notin M_1.\end{cases}$$

Функция $f_0(x)$ принадлежит классу $H_P^{\omega,\infty}$, поэтому

$$E_T(H_P^{\omega,\infty})\ge\max_{x\in M_1}\left|f_0(x)-S(f_0,x)\right|\ge\left|f_0(x_0)-S(f_0,x_0)\right|=\left|S(f_0,x_0)\right|.$$

Из представления интерполяционного полилинейного сплайна в виде (3), равенств (12) и (13), получим

$$S(\widetilde{f}_0,x_0)=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n.$$

Значит

$$E_T(H_P^{\omega,\infty}) \geq \left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n =$$

$$= \max_{\substack{0\leq x^2\leq \frac{a}{2} \\ x^{i+1}\leq x^i,\, i=\overline{2,n-1}}} \left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Учитывая оценки сверху и снизу, получим

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)= \max_{\substack{0\leq x^2\leq \frac{a}{2}, \\ x^{i+1}\leq x^i,\, i=\overline{2,n-1}}} \left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $\omega(t)$ *– выпулый вверх модуль непрерывности, то, в случае* $P=[0,b]^2$, *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\frac{N}{b}\max_{0\leq x\leq \frac{b}{2N}}\left(\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\left(\frac{b}{N}-x\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x\right)x\right).$$

Доказательство теоремы 3 с очевидными упрощениями повторяет доказательство теоремы 2.

Покажем, что результат теоремы 3 не совпадает с результатом теоремы 1, то есть равенство $E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\omega\left(\frac{1}{2}d_\infty(T)\right)$ места не имеет. Для этого найдем величину отклонения интерполяционных полилинейных сплайнов на классе функций $H_P^{\omega,\infty}$ в случае $P=[0,b]\times[0,b]$, и $\omega(t)=t$

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\max_{0\leq x^2\leq \frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2N}\left(\frac{b}{N}-x^2\right)+\left(\frac{b}{N}-x^2\right)x^2\right)=\frac{9}{16}\cdot\frac{b}{N},$$

причем наибольшее значение достигается при $x^2=\dfrac{b}{4N}$. Однако в данном случае $\omega\left(\frac{1}{2}d_{\infty}(T)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{N}$.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными / В.Ф. Бабенко // Мат. заметки – 1978. – 24, №1. – С. 43–52.
2. **Бабенко В.Ф.** Об интерполяции многогранными функциями / В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун // Мат. заметки – 1975. – 18, №6. – С. 803–814.
3. **Вакарчук С.Б.** К интерполяции билинейными сплайнами / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки – 1990 – 47, №5. – С. 26–30.
4. **Вакарчук С.Б.** Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интепроляционными билинейными сплайнами / С.Б. Вакарчук, К.Ю. Мыскин // Укр. мат. журнал – 2005 – 57, №2. – С.147–157.
5. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближений / Н.П. Корнейчук – М., – 1987. С. 424.
6. **Малоземов В.Н.** Об отклонении ломаных / В.Н. Малоземов // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия – 1966. – №7. – С.150–153.
7. **Сторчай В.Ф.** Об отклонении ломаных в метрике L_p / В.Ф. Сторчай // Мат. заметки – 1969 – 5, №1. – С. 31–37.
8. **Сторчай В.Ф.** Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Изв. вузов. Математика – 1973 – 8. – С. 84–88.
9. **Шабозов М.Ш.** О погрешности интерполяции билинейными сплайнами / М.Ш. Шабозов // Укр. мат. журнал – 1994 – 46, №11. – С.1554–1560.
10. **Шабозов М.Ш.** Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами / М.Ш. Шабозов // Мат. заметки – 1996 – 59, №1. – С. 142–152.

Надійшла до редколегії 1.04.10