ISSN №9125 0912. ВІСНИК ДНУ Серія «Математика», №6/1 2010. Вип. 15. С.72 – 80

УДК 517.5

Л.Г. Бойцун., М.О. Шумейко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПІДСУМОВУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ФУР'Є ТА СПРЯЖЕНОГО ІНТЕГРАЛА ФУР'Є МЕТОДОМ Г.Ф. ВОРОНОГО

Установлені достатні умови про підсумовування інтеграла Фур'є та спряженого інтеграла Фур'є методом Вороного.

Ключові слова: інтеграл Фур'є, метод Вороного, підсумовування.

Установлены достаточные условия суммирования интеграла Фурье и сопряженного интеграла Фурье методом Вороного.

Ключевые слова: интеграл Фурье, метод Вороного, суммирование.

The sufficient conditions under which the Fourier integral and conjugate Fourier integral are Voronoi summable are obtained.

Key words: Fourier integral, Voronoi method, summability.

1. Нехай функціїя $f(u)$ і $p(t)$ інтегровні на кожному скінченному проміжку $[0,A]$, $A>0$ і $S(t)=\int_0^t f(u)du$, $P(y)=\int_0^y p(t)dt.$

Кажуть, що інтеграл $\int_0^\infty f(u)du$ підсумовується методом Г.Ф. Вороного до I, або скорочено $(W,p(y))$ - підсумовується до I, згідно з [1], якщо

$$\lim_{y\to\infty}\tau(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)s(u)du=I.$$

Інтеграл Фур'є цієї функції $f(t)\in L(-\infty;\infty)$, згідно з [2], є

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)dt, \tag{1}$$

спряжений інтеграл Фур'є

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)dt. \tag{2}$$

Введемо позначення:

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),\quad \psi(t)=f(x+t)-f(x-t),$$

$$\varphi_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)du,\quad \alpha>0,$$

$$\psi_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\psi(u),\quad \alpha>0,\quad B(y,t)=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)\frac{\sin(y-u)t}{t}du,$$

$$\widetilde{B}(y,t)=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)\frac{\cos(y-u)t}{t}du.$$

Означення 1. Якщо для $\alpha>0$ та інтегрованій за Лебегом функції $F(u)$

© Л.Г. Бойцун., М.О. Шумейко, 2010

$$F_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}F(u)du=o(t^\alpha),\quad \textit{коли } t\to 0,$$

то кажуть, що $F(t)$ є (C,α) - неперервною у точці $t=0$.

Відомо, що якщо $F(u)$ неперервна (C,α), то вона також неперервна (C,β) для всіх $\beta>\alpha$.

Означення 2. Будемо казати, що точка x для якої функція $f(x)$ визначена, буде K_α-регулярною, якщо $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ є (C,α)-неперервною; буде $\widetilde{K}_\alpha$- регулярною, якщо $\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)$ є (C,α) -неперервною та

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty\frac{\psi(t)}{t}dt$$

існує та скінчений.

Означення 3. Метод підсумовування називається K_α-ефективним, якщо він підсумовує інтеграл Фур'є функції $f(x)$ до відповідного значення у всіх K_α-регулярних точках; $\widetilde{K}_\alpha$-ефективним, якщо він підсумовує спряжений інтеграл Фур'є функції $f(x)$ до $\widetilde{f}(x)$ у всіх $\widetilde{K}_\alpha$- регулярних точках.

Доведена слідуюча теорема.

Теорема *Регулярний метод* $(W,p(y))$ *буде* K_α *та* $\widetilde{K}_\alpha$*-ефективним,* $0<\alpha\le 1$, *якщо двічі неперервна диференційована функція* $p(t)$ *задовольняє слідуючим умовам:*

$$y|p(y)|<C\cdot|P(y)|, \tag{3}$$

$$\int_0^y t|p'(t)|dt<C\cdot|P(y)|, \tag{4}$$

$$\int_0^y t(y-t)|p''(t)|dt<C\cdot|P(y)|, \tag{5}$$

$$\int_0^y\frac{|P(t)|}{t^2}dt<C\cdot\frac{|P(y)|}{y}, \tag{6}$$

де C *– додатня константа, яка не залежить від* y, $p(0)=0$.

Для інтеграла Фур'є маємо:

$$S(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)dt\int_0^y\cos u(t-x)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin y(t-x)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{\sin yt}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin yt}{t}dt.$$

Для спряженого інтеграла Фур'є:

$$\widetilde{S}(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin u(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_0^y\sin u(t-x)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1-\cos y(t-x)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{1-\cos yt}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos y}{t}$$

Нехай $\tau(y)=\dfrac{1}{P(y)}\displaystyle\int_0^y p(u)S(y-u)du$, $\widetilde{\tau}(y)=\dfrac{1}{P(y)}\displaystyle\int_0^y p(u)\widetilde{S}(y-u)du.$

Ми маємо

$$\tau(y)-f(x)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)S(y-u)du-f(x)\cdot\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)f(x)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left[S(y-u)-f(x)\right]du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(y-u)t}{t}dt-f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(y-u)t}{t}dt\right)du$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)du\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin(y-u)t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^{\infty}\phi(t)dt\int_0^y p(u)\frac{\sin(y-u)t}{t}du=\int_0^{\infty}\phi(t)B(y,t)dt.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\tau(y)-f(x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\cos utdu+\int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t}B(y,t)dt=I_1+I_2.$$

Для спряженого інтеграла

$$\tilde{\tau}(y)-\tilde{f}(x)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\tilde{S}(y-u)du-f(x)\cdot\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\tilde{f}(x)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left[\tilde{S}(y-u)-\tilde{f}(x)\right]du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\psi(t)\frac{1-\cos(y-u)t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt\right)du=$$

$$=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)du\int_0^{\infty}\psi(t)\frac{\cos(y-u)t}{t}dt=-\int_0^{\infty}\psi(t)\widetilde{B}(y,t)dt.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\tilde{\tau}(y)-\tilde{f}(y)=$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty \frac{\psi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\sin utdu+\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t}\tilde{B}(y,t)dt=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2.$$

Допоміжні леми. Тут і далі ми будемо вважати, що умови теореми виконані.

Лема 1. Якщо двічі неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (5) і (6), тоді

$$\int_0^y (y-t)|p''(t)|dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)=o(P(y)). \tag{7}$$

Доведення. Покладемо $U(y)=\int_0^y t(y-t)|p''(y)|dt=O(P(y))$,

інтегруючи частинами, отримаємо

$\int_0^y (y-t)|p''(t)|dt=\int_0^y \frac{t(y-t)|p''(t)|}{t}dt=\frac{U(y)}{y}+\int_0^y \frac{U(t)}{t^2}dt$, і результат випливає з (6).

Лема 2. Якщо неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (4) і (6), тоді

$$\int_0^y |p'(t)|dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)=o(P(y)). \tag{8}$$

Доведення. Покладемо $V(y)=\int_0^y t|p'(y)|dt=O(P(y))$.

Інтегруючи частинами, отримаємо

$\int_0^y |p'(t)|dt=\int_0^y \frac{t|p'(t)|}{t}dt=\frac{V(y)}{y}+\int_0^y \frac{V(t)}{t^2}dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)$ за умовою (6).

Лема 3. Якщо $p(y)$ задовольняє умову (6), тоді

$$\int_0^y \frac{|P(t)|}{t}dt<C\cdot|P(y)|. \tag{9}$$

Це випливає з умови (6) і з нерівності $\frac{1}{y}\int_0^y \frac{|P(t)|}{t}dt<\int_0^y \frac{|P(t)|}{t^2}dt$.

Розглянемо

$$I_1=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\cos utdu \quad \text{та}$$

$$\tilde{I}_1=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty \frac{\psi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\sin utdu.$$

Ми маємо, що

$$\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)\cos utdu \quad \text{та} \quad -\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)\sin utdu$$

є дійсна та уявна частина функції

$$\Re(y,t)=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)e^{-iut}du=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y (y-u)p(u)e^{-i(y-u)t}du=$$

$$=\frac{e^{-iyt}}{\pi P(y)}\int_0^y (y-u)p(u)e^{iut}du. \tag{10}$$

Наша теорема буде доведена, якщо ми покажемо, що

$$\lim_{y\to\infty}T=\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty g(t)\Re(y,t)dt=0, \tag{11}$$

де $g(t)=o(1)$, коли $t\to 0$.

$$T=\left(\int_0^{\frac{1}{y}}+\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right)g(t)\Re(y,t)dt=T_1+T_2+T_3.$$

Ми продовжимо оцінювати ядро (10).

Лема 4. Ми маємо

$$\Re(y,t)=O(y).$$

Дійсно $|\Re(y,t)|\le\frac{1}{\pi|P(y)|}\int_0^y|(y-u)p(y)|du\le\frac{y}{\pi P(y)}\int_0^y|p(u)|du=O(y)$

за умовою регулярності методу.

Лема 5. Якщо двічі неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (7) і (8), тоді

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du=o(P(y))$$

рівномірно по t *для* $t\ge\delta>0_+$ *для фіксованого* δ.

Двічі інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du=-\frac{p(0)y}{it}-\frac{p(y)e^{iyt}}{t^2}-\frac{p'(0)y}{t^2}+\frac{p(0)}{t^2}-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_0^y p''(u)(y-u)e^{iut}du+\frac{2}{t^2}\int_0^y p'(u)e^{iut}du.$$

За умовою леми ми маємо

$$o(P(y))=\int_0^y(y-u)|p''(u)|du\ge\left|\int_0^y(y-u)p''(u)du\right|=\left|yp'(y)-yp'(0)-\int_0^y up''(u)du\right|=$$

$$= \left| yp'(y) - yp'(0) - up'(u) \Big|_0^y + \int_0^y p'(u)du \right| \geq$$

$$\geq |yp'(0)| - |p(y) - p(0)| \Rightarrow |yp'(0)| \leq 0(P(y)) + |p(y) - p(0)| = o(P(y)). \qquad (12)$$

Далі

$$\left| \int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du \right| \leq \frac{|P(y)|}{t^2} + \frac{|p'(0)|y}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int_0^y |p''(u)|(y-u)du + \frac{2}{t^2}\int_0^y |p'(u)|du,$$

таким чином за умовами (3), (12), лемою 1, лемою 2 випливає

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du = o(P(y)).$$

Залишається знайти оцінки для ядра $\Re(y,t)$ у проміжку $(1/y, \delta)$. Щоб зробити це, ми спочатку розглянемо $\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du$. Покладемо

$$|p(y)| = r(y); \quad R(y) = \int_0^y r(u)du; \quad V(y) = \int_0^y |p'(u)|du; \quad W(z) = \int_0^z (y-u)|p''(u)|du.$$

Ми маємо

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du = \int_0^{\frac{1}{t}} + \int_{\frac{1}{t}}^y = X_1 + X_2.$$

Тоді

$$|X_1| = \left| \int_0^{\frac{1}{t}} p(u)(y-u)e^{iut}du \right| \leq \int_0^{\frac{1}{t}} |p(u)|(y-u)du \leq y\int_0^{\frac{1}{t}} |p(u)|du = yR\left(\frac{1}{t}\right).$$

Далі, інтегруючи частинами двічі

$$X_2 = \int_{\frac{1}{t}}^y p(u)(y-u)e^{iut}du = -\frac{p\left(\frac{1}{t}\right)\left(y-\frac{1}{t}\right)e^{i}}{it} - \frac{p(y)e^{iyt}}{t^2} - \frac{p'\left(\frac{1}{t}\right)\left(y-\frac{1}{t}\right)e^{i}}{t^2} + \frac{p\left(\frac{1}{t}\right)e^{i}}{t^2} -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_{\frac{1}{t}}^y p''(u)(y-u)e^{iut}du + \frac{2}{t^2}\int_{\frac{1}{t}}^y p'(u)e^{iut}du.$$

Так що, якщо A-стала, що не залежить від y і t,

$$|X_2| \le A\frac{1}{t^2}\left[yt\left|p\left(\frac{1}{t}\right)\right| + |p(y)| + y\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right| + \left|p\left(\frac{1}{t}\right)\right| + \int_{\frac{1}{t}}^{y}(y-u)|p''(u)|du + 2\int_{\frac{1}{t}}^{y}|p'(u)|du \right].$$

У результаті ми маємо

$$|\Re(y,t)| \le \frac{1}{\pi|P(y)|}\left|\int_0^y p(y)(y-u)e^{iut}du\right| \le A\sum_{i=1}^{7} M_i(y,t),$$

де

$$M_1(y,t) = \frac{yR\left(\frac{1}{t}\right)}{R(y)}; \qquad M_2(y,t) = \frac{y}{tR(y)}r\left(\frac{1}{t}\right);$$

$$M_3(y,t) = \frac{y}{t^2R(y)}\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right|; \qquad M_4(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}r\left(\frac{1}{t}\right); \qquad M_5(y,t) = \frac{r(y)}{t^2R(y)};$$

$$M_6(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}\left[W(y) - W\left(\frac{1}{t}\right)\right];$$

$$M_7(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}\left[V(y) - V\left(\frac{1}{t}\right)\right].$$

Доведення теореми. Почнемо оцінювати кожний з інтегралів T_i, $i = 1,2,3$. За лемою 4 і означенням 2

$$T_1 = \int_0^{\frac{1}{y}} g(t)\cdot\Re(y,t)dt = O\left(y\int_0^{\frac{1}{y}} g(t)dt\right) = o(1).$$

За лемою 5: $T_3 = \int_\delta^\infty g(t)\Re(y,t)dt = o\left(\int_\delta^\pi g(t)dt\right) = o(1).$

Для оцінки T_3 нам достатньо показати, що $\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_i(y,t)dt \le M$ для $i = 1,2,\ldots,7$.

Для $i = 1$ ми маємо за умовою (6)

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_1(y,t)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} R\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{R(s)}{s^2}ds \le C.$$

Для $i = 2$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_2(y,t)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\frac{r\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{r(s)}{s}ds \le \frac{y}{|R(y)|}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{|P(s)|}{s^2}ds \le C$$

за умовами (3) і (6). Для $i=3$ за умовою (8)

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_3(y,t)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\frac{\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right|}{t^2}dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}|p'(s)|ds \le C.$$

Для $i=4$ ми маємо

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_4(y,t)dt = \frac{1}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\frac{r\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt = \frac{1}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y} r(s)ds \le 1.$$

Для $i=5$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_5(y,t)dt = \frac{r(y)}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\frac{dt}{t^2} = \frac{r(y)}{R(y)}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{\delta} = \frac{r(y)}{R(y)}\left(y-\frac{1}{\delta}\right) \le \frac{yr(y)}{R(y)} = O(1) \text{ за}$$

(3).

Для $i=6$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_6(y,t)dt = \frac{1}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\left[W(y)-W\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^2} < \frac{1}{R(y)}\int_{0}^{y}[W(y)-W(s)]ds$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_6(y,t)dt < \frac{1}{R(y)}\int_{0}^{y} s(y-s)|p''(s)|ds,$$

а це обмежена величина за умовою (5).

Для $i=7$, як і для $i=6$, маємо

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_7(y,t)dt = \frac{1}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\left[V(y)-V\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^2} < \frac{1}{R(y)}\int_{0}^{y}[V(y)-V(s)]ds =$$

$$= \frac{1}{R(y)}\int_{0}^{y} s\,dv(s) = \frac{1}{R(y)}\int_{0}^{y} s|p'(s)|ds,$$

а це обмежена величина за умовою (4).

Нам залишається показати, що

$$I_2 = \int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t}B(y,t)dt = o(1), \quad y\to\infty, \text{ і } \tilde{I}_2 = \int_0^{\infty}\frac{\psi_1(t)}{t}\tilde{B}(y,t)dt = o(1).$$

Взявши довільне $\varepsilon > 0$, підберемо $\delta > 0$ таке, щоб при $0 < t \le \delta$ буде $\varphi_1(t) < \varepsilon \cdot t$. Тоді

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t} B(y,t)dt = \left(\int_0^{\frac{1}{y}} + \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} + \int_\delta^\infty \right) \frac{\varphi_1(t)}{t} B(y,t)dt = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Так як $B(y,t) = O(y)$, то

$$I_{11} = O\left(y \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\varphi_1(t)}{t} dt \right) = O\left(y \cdot o(1) \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} dt \right) = o(1).$$

$$I_{13} = \int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t} dt \frac{1}{\pi P(y)} \int_0^y \frac{p(u)}{t} \sin(y-u)tdu = \frac{1}{P(y)} \int_0^y p(u)du \int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \sin(y-u)tdu = o(1),$$

при $\delta \le t < \infty, \quad 0 \le u \le y.$

Так як $\int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \sin(y-u)tdu = o(1)$ рівномірно відносно u, то $I_{13} = o(1)$ при $y \to \infty$.

Далі за лемою 6 $\mathrm{B(y,t)} = \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{P(1/t)}}{\mathrm{tP(y)}} \right)$, так що $I_{12} = O\left(\frac{1}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \right)$.

Ми маємо

$$\frac{1}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt < \frac{\varepsilon}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{1}{t} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt = \frac{\varepsilon}{P(y)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{y} \frac{|P(u)|}{u} du < C \cdot \varepsilon.$$

Таким чином ми маємо, що $I_2 = o(1)$, коли $y \to \infty$.

Аналогічно доводиться, що $\widetilde{I}_2 = o(1)$, коли $y \to \infty$.

Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. Вороной Г.Ф. Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда. //Собр. соч., т.3 /Г.Ф. Вороной – К., 1952. – С. 9 –10.

2. Титчмарш Е. С. Введение в теорию интеграла Фурье/Е.С. Титчмарш– М., 1948. – 453 с.

Надійшла до редколегії 17.01.10.