УДК 517.5

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ТЕОРЕМА О ПОПЕРЕЧНИКЕ ШАРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доведено теорему про слабкі поперечники кулі у просторах відображень зі значеннями в лінійних нормованих просторах. Наведено приклад застосування цієї теореми.

Важную роль в теории приближений играет введенное А.Н. Колмогоровым [3] понятие поперечника множества в нормированном пространстве, позволяющее сравнивать аппроксимативные свойства подпространств заданной размерности. Напомним соответствующие определения.

Пусть X – линейное нормированное пространство над полем вещественных или чисел, $\mathcal{M} \subset X$ – некоторое множество, G – подпространство пространства X. Наилучшим приближением элемента $f \in X$ подпространством G в метрике пространства X называется величина

$$E(f, G)_X = \inf_{g\in G} \| f-g\|_X , \tag{1}$$

а наилучшим приближением множества $\mathcal{M}$ подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M},G)_X = \sup_{f\in\mathcal{M}} E(f,G)_X . \tag{2}$$

Соотношением

$$d_n(\mathcal{M}, X) = \inf_{\dim G=n} E_n(\mathcal{M},G)_X \tag{3}$$

определяется n-поперечник по Колмогорову класса $\mathcal{M}$ в пространстве X. Подпространство G, реализующее inf в правой части (3) называется экстремальным для класса $\mathcal{M}$.

Пусть C и L_p ($1\le p \le \infty$) пространства 2π-периодических функций $f : R \to R$ с соответствующими нормами $\| f\|_C$ и $\| f\|_{L_p} = \|f\|_p$. Через W_p^r ($r=1,2,...; 1\le p \le \infty$) обозначим класс функций $f\in C$ таких, что производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$. В [3] Колмогоровым установлено, что

$$d_{2n-1}\left(W_p^r, L_2\right) = \frac{1}{n^r}$$

и экстремальным подпространством является подпространство T_{2n-1}

тригонометрических полиномов порядка не выше n-1. В дальнейшем многие математики изучали задачу вычисления поперечников различных классов функций в различных функциональных пространствах. По поводу изложения известных результатов для классов периодических функций одной переменной и дальнейших ссылок сошлемся на [4 – 6; 8; 9].

Отметим, что при получении оценок снизу поперечников по Колмогорову во многих случаях использовалась следующая теорема о поперечнике шара.

Теорема 1 ([6, с. 342]). *Пусть* X_{n+1} -- (n+1) – *мерное подпространство пространства* X, B – *шар радиуса* ρ в X_{n+1}, *т. е.* $B_\rho = \{x \in X_{n+1} : \|x\|_X \le \rho\}$. *Тогда*

$$d_n(B,X) = \rho.$$

Теперь обратимся к задачам аппроксимации функций, значения которых принадлежат заданному линейному нормированному пространству. Пусть Q – некоторое множество и X – некоторое линейное нормированное пространство функций $f : Q \to R$ с нормой $\|\cdot\|_X$. Будем предполагать, что X и $\|\cdot\|_X$ обладают следующими свойствами:

1) $x \in X \Rightarrow |x| \in X$;

2) $\|x\|_X = \| |x| \|_X$;

3) $|x| \le |y| \Rightarrow \|x\|_X \le \|y\|_X$.

Отметим, что в качестве X можно взять пространство функций $x : Q \to P$, непрерывных на компакте Q, с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t \in Q} |x(t)|$, а также любую идеальную структуру [7, с. 59]. Пусть также задано линейное нормированное пространство Y. Рассмотрим произвольное линейное пространство L отображений $f : Q \to Y$ таких, что функция $\|f(t)\|_Y$, как функция от переменного $t \in Q$, принадлежит пространству X. Через $L_X(Q,Y)$ будем обозначать пространство L с нормой

$$|||f||| = \| \|f(t)\|_Y \|_X.$$

Рассмотрим два примера.

1. Пусть Q – метрический компакт, Y – произвольное линейное нормированное пространство, L = C(Q,Y) – пространство непрерывных отображений $f : Q \to Y$ с нормой

$$|||f||| = \max\{\|f(t)\|_Y : t \in Q\}.$$

Это пространство получается по описанной выше схеме, как пространство $L_{C(Q)}(Q,Y)$, где C(Q) – пространство числовых функций $f : Q \to R$, непрерывных на компакте Q.

2. Пусть Q – пространство с мерой, $L = L_p(Q,Y)$ ($1 \le p < \infty$) – множество интегрируемых по Бохнеру функций $f : Q \to R$ с конечной нормой

$$|||f||| = \left(\int_Q \|f(t)\|_Y^{\,p} \, dt \right)^{1/p}.$$

Это пространство получается по описанной выше схеме, как пространство $L_{L_p(Q)}(Q,Y)$, где $L_p(Q)$ – пространство числовых функций $f : Q \to R$, суммируемых в p-й степени на Q.

Задачи аппроксимации функций из $L_X(Q,Y)$ и подмножеств пространства $L_X(Q,Y)$ подпространствами могут быть поставлены аналогично (1) и (2). Пусть G – подпространство в $L_X(Q,Y)$, $f \in L_X(Q,Y)$, $\mathcal{M} \subset L_X(Q,Y)$. Наилучшим приближением функии $f \in L_X(Q,Y)$ подпространством G в метрике пространства $L_X(Q,Y)$ называется величина

$$E\,(f, G)_{L_X(Q,Y)} = \inf_{h \in G} |||\, f - g \,||| , \qquad (4)$$

а наилучшим приближением множества $\mathcal{M}$ подпространством G – величина

$$E\,(\mathcal{M}, G)_{L_X(Q,Y)} = \sup_{f \in \mathcal{M}} E\,(\, f, G)_{L_X(Q,Y)} .$$

Отметим, что если пространство Y бесконечномерно, то в $L_X(Q,Y)$ даже самые простые подпространства, скажем подпространства констант (постоянных отображений), будут бесконечномерными. По этой причине для сравнения аппроксимативных свойств некоторых совокупностей подпространств пространства $L_X(Q,Y)$ в работе [1] были введены понятия слабой линейной зависимости и независимости элементов этих подпространств, понятие слабой размерности и понятие соответствующих (слабых) поперечников. Напомним эти определения.

Определение 1. Пусть $\{h_k\} \subset L_X(Q,Y)$ - некоторая совокупность элементов. Будем говорить, что элементы $\{h_k\}$ являются слабо линейно зависимыми (или w – линейно зависимыми), если для любого ненулевого функционала $G \in Y^*$ числовые функции $\langle G, h_k \rangle \in X$ являются линейно зависимыми. В противном случае элементы $\{h_k\}$ назовем слабо линейно независимыми.

Определение 2. Пусть G – некоторое линейное подпространство пространства $L_X(Q,Y)$. Будем говорить, что G имеет слабую размерность n и писать w-dim G= n, если

1) найдутся n элементов в G, которые слабо линейно независимы;
2) любые n+1 элементов в G слабо линейно зависимы.

Примером подпространства слабой размерности n в $L_X(Q,Y)$ является совокупность

$$G=\left\{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)y_k : y_k\in Y\right\},$$

где $\{\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)\}$ – линейно независимые функции из X.

Определение 3. Соотношением

$$d^w{}_n(\mathcal{M},L_X(Q,Y))=\inf_{w-\dim G=n}E_n(\mathcal{M},G)_{L_X(Q,Y)}\qquad(4)$$

определяется слабый n-поперечник по Колмогорову класса $\mathcal{M}\subset L_X(Q,Y)$ в пространстве X. Подпространство G, реализующее inf в правой части (4), называется экстремальным для класса $\mathcal{M}$.

Пусть $\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1}$ - линейно независимая система функций из X и пусть $G_{n+1}=\mathrm{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1}\}$, $B_{n+1,\rho}=\{g(t)\in G_{n+1}:\|g(t)\|_X\le\rho\},\rho>0$. Для произвольного $y\in Y,\|y\|_Y=1$, положим

$$G^y_{n+1}=\{f\in L_X(Q,Y):f(t)=g(t)\cdot y,g(t)\in G_{n+1}\}$$

и

$$B^y_{n+1,\rho}=\{f\in L_X(Q,Y):f(t)=g(t)\cdot y,g(t)\in H_{n+1},\|g(t)\|_X\le\rho\}.$$

Следующая теорема является для слабых поперечников аналогом теоремы о поперечнике шара.

Теорема 2. *Для любого* $n\in N$, *любого* $\rho>0$ *и произвольного* $y\in Y$, $\|y\|_Y=1$,

$$d^w{}_n\left(B^y_{n+1,\rho},L_X(Q,Y)\right)=\rho.$$

Доказательство. Неравенство

$$d^w{}_n\left(B^y_{n+1,\rho},L_X(Q,Y)\right)\le\rho$$

очевидно. Докажем неравенство

$$d^w{}_n\left(B^y_{n+1,\rho}, L_X(Q,Y)\right) \geq \rho .$$

Возьмем произвольный функционал $F \in Y^*$ такой, что $\|F\|_{Y^*} = 1$ и $\langle F, y\rangle = \|y\|_Y = 1$ (как хорошо известно, такой функционал F существует). Отметим, что

$$\left\langle F, H^y_{n+1} \right\rangle := \left\{\langle F, g(t)\rangle : g(t) \in G_{n+1}\right\} -$$

(n+1) - мерное подпространство в X,

$$\left\langle F, B^y_{n+1,\rho} \right\rangle = \left\{\langle F, f\rangle : f \in L_X(Q,Y) : f(t) = g(t)\cdot y, g(t) \in G_{n+1}, \|g(t)\|_X \leq \rho\right\} =$$

$$= \left\{g(t) \in X : \|g(t)\|_X \leq \rho\right\} -$$

шар радиуса ρ в H_{n+1}.

Пусть G_n – подпространство пространства $L_X(Q,Y)$, имеющее слабую размерность не выше n. Рассмотрим подпространство

$$\left\langle F, H_n \right\rangle := \left\{\langle F, h(t)\rangle : h(t) \in G_n\right\}$$

пространства X, которое в силу определения 2 будет иметь размерность не выше n.

Для любого $f(t) \in B^y_{n+1,\rho}$ вида $f(t) = g(t)\cdot y$ будем иметь

$$\inf_{h\in G_n} \left\|f(t) - h(t)\right\| = \inf_{h\in G_n} \left\| \|f(t) - h(t)\|_Y \right\|_X \geq$$

$$\geq \inf_{h\in G_n} \left\| \left|\langle F, f(t) - h(t)\rangle\right| \right\|_X = \inf_{h\in G_n} \left\| \left|\langle F, f(t)\rangle - \langle F, h(t)\rangle\right| \right\|_X =$$

$$= \inf_{h\in G_n} \left\| \left|\langle F, y\rangle g(t) - \langle F, h(t)\rangle\right| \right\|_X = \inf_{u\in\langle F, G_n\rangle_n} \left\| |g(t) - u(t)| \right\|_X .$$

Следовательно,

$$\sup_{f(t)\in B^y_{n+1,\rho}} \inf_{h\in G_n} \left\| \|f(t) - h(t)\|_Y \right\|_X \geq \sup_{f(t)\in B^y_{n+1,\rho}} \inf_{u\in\langle F, G_n\rangle_n} \left\| |g(t) - u(t)| \right\|_X ,$$

т. е.

$$E\left(B^y_{n+1,\rho}, G_n\right)_{L_X(Q,Y)} \geq E\left(B_{n+1,\rho}, \langle F, G_n\rangle\right)_X ,$$

Откуда

$$d_n^w\left(B_{n+1,\rho}^y, L_X(Q,Y)\right) \geq d_n\left(B_{n+1,\rho}, X\right) = \rho$$

(последнее соотношение справедливо в силу теоремы 1). Теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 2 найдем точные значения слабых поперечников одного класса отображений в сепарабельное гильбертово пространство H. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_H$. В пространстве $L_{2,H}=L_2([0, 2\pi], H)$ интегрируемых по Бохнеру на $[0, 2\pi]$ 2π – периодических функций $f: R \to H$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt < \infty,$$

введем скалярное произведение

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} (f(t),g(t))dt$$

и норму

$$\| f \|_{2,H}^2 := \int_0^{2\pi} (f(t),f(t))dt = \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 \, dt.$$

Наилучшим приближением функции $f \in L_2([0, 2\pi], H)$ подпространством $G \subset L_2([0, 2\pi], H)$ называется величина

$$E(f, G)_{2,H} = \inf_{g \in G} \| f - g \|_{2,H},$$

а наилучшим приближением некоторого класса функций $\mathcal{M} \subset L_2([0, 2\pi], H)$ подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M}, G)_{2,H} = \sup_{f \in \mathcal{M}} E(f, G)_{2,H}.$$

В качестве G будем использовать множество T_{2n-1}^H обобщенных тригонометрических полиномов порядка n-1 вида

$$T_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \quad A_k, B_k \in H.$$

Каждой 2π – периодической функции f, принадлежащей $L_2([0, 2\pi], H)$, поставим в соответствие ряд, который называется рядом Фурье данной функции

$$f(t) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \tag{5}$$

где

$$A_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad B_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad k \in N \cup \{0\}.$$

Известно, [10, § 5.4.9] что для функций $f \in L_2([0,2\pi],H)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2\,dt = \frac{1}{2}\|A_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \| A_k \|^2 + \| B_k \|^2 .$$

Кроме того

$$E^2(f, T^H_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \| A_k \|^2 + \| B_k \|^2, \tag{6}$$

где $s_n(f;t)$ – частная сумма порядка n-1 ряда (5).

Пусть задана числовая последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in N}$ такая, что $|\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}|, k \in N$, и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Через W^Λ обозначим класс элементов из $f \in L_2([0,2\pi],H)$ таких, что

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \le 1.$$

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Для произвольного* $n \in N$

$$d^w_{2n-1}\left(W^\Lambda, L_2([0,2\pi],H)\right) = |\lambda_n|^{-1}.$$

Доказательство. Имеем для любой функции $f \in W^\Lambda$

$$E^2(f, T^H_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|_2^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right)$$

$$= \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2} \le \lambda_{|n|}^{-2} \pi \sum_{k=n}^{\infty} \left(\| A_k \|^2 + \| B_k \|^2\right) \lambda_k^2 \le \lambda_n^{-2},$$

откуда следует нужная оценка сверху для поперечника

$$d_{n-1}^{w}\left(W^{\wedge}, L_2([0,2\pi], H)\right) \leq \left|\lambda_n\right|^{-1}.$$

Для получения оценки снизу заметим, что для любого тригонометрического полинома вида

$$T_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kt + B_k \sin kt, \quad A_K, B_k \in H,$$

будет

$$\pi \sum_{k=1}^{n} \left(\left\|A_k\right\|^2 + \left\|B_k\right\|^2\right)\lambda_k^2 \leq \pi\lambda_n^2 \sum_{k=1}^{n}\left(\left\|A_k\right\|^2 + \left\|B_k\right\|^2\right) = \lambda_n^2 \left\|T_n\right\|_{2,H}^2,$$

Так что шар радиуса $\left|\lambda_n\right|^{-1}$ в подпространстве T_{2n+1}^{H} слабой размерности 2n+1 пространства $L_2([0,2\pi],H)$ содержится в классе $W^{\wedge}$. В силу теоремы 2 получим

$$d_{n-1}^{w}\left(W^{\wedge}, L_2([0,2\pi[0H)\right) \geq \left|\lambda_n\right|^{-1}.$$

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В. Ф.** Аппроксимация непрерывных вектор-функций / В. Ф. Бабенко, С.А.Пичугов // Укр. мат. журн. 1994. Т.46, № 11. С. 1435-1448.
2. **Дороговцев А. Я.** Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем – К., 1992, 320 с.
3. **Колмогоров А. Н.** О наилучшем приближении функций заданного функционального класса/ А. Н. Колмогоров, Избранные труды. Математика, механика – М., 1985, С. 186 – 189.
4. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук – М., 1976, 320 с.
5. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук – М., 1984, 352 с.
6. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближений / Н. П. Корнейчук – М., 1987, 424 с.
7. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов – М., 1978, 400 с.
8. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров – М., Изд-во МГУ, 1976, 304 с.
9. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory, Berlin, Springer-verlag, 1985, 291 p.

Надійшла до редколегії 05.02.09