УДК 517.5

В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО АДАМАРУ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУОСИ

Одержано нові точні нерівності для дробових похідних за Адамаром для функцій, визначених на півосі.

Точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие нормы промежуточных производных через нормы самой функции и ее старшей производной, играют важную роль во многих областях математики. Известно большое количество результатов такого типа для производных целых порядков [1–3]. В то же время, для решения широкого круга задач анализа и приложений необходимы исследования производных дробных порядков. Неравенства типа Колмогорова в случае дробных производных изучены в значительно меньшей степени и, главным образом, для дробных производных в смысле Римана-Лиувилля [6, с. 85] и Маршо [6, с. 95]. Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для таких производных можно найти в [4;5; 7 – 9].

Дробные производные по Адамару [6, с.252] порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $f : R_+ \to R$ определяются формулами:

$$(D^{\alpha}_{+}f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{f(x)-f(xt)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t},$$

$$(D^{\alpha}_{-}f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^{\infty} \frac{f(x)-f(xt)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}.$$

Через $C(R_+) = C(0,+\infty)$ будем обозначать пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f : R_+ \to R$ с нормами

$$\|f\|_{C(R_+)} := \sup_{x\in R_+}|f(x)|,$$

а через $L_\infty(R_+)$ – пространство измеримых функций $f : R_+ \to R$ таких, что

$$\|f\|_{L_\infty(R_+)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R_+}|f(x)| < +\infty .$$

Пусть еще $L^1_\infty(R_+)$ – это множество локально абсолютно непрерывных функций $f \in C(R_+)$ таких, что $f' \in L_\infty(R_+)$.

В данной работе мы получим точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие производные по Адамару $|(D^\alpha_\pm f)(x)|$ функций $f \in L^1_\infty(R_+)$ через $\|f\|_{C(R_+)}$ и $\|f'\|_{L_\infty(R_+)}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$. *Для любой функции* $f \in L^1_\infty(R_+)$ *и любого* $x \in R_+$ *справедливо точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_+ f)(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right), \quad (1)$$

если $0 < h < 1$, *и точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_- f)(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}\int_1^h\left((\ln t)^{-\alpha} - (\ln h)^{-\alpha}\right)dt\right), \quad (2)$$

если $h > 1$.

Неравенства (1) и (2) обращаются в равенства для функций

$$g^+_{x,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{(h-1)x}{2}, & 0 < u < hx, \\ u - \dfrac{(1-h)x}{2}, & hx \le u \le x, \\ \dfrac{(1-h)x}{2}, & u > x \end{cases} \quad \text{и} \quad g^-_{x,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{(h-1)x}{2}, & 0 < u < x, \\ \dfrac{(h-1)x}{2} - u, & x \le u \le hx, \\ \dfrac{(1-h)x}{2}, & u > hx \end{cases}$$

соответственно.

Доказательство. Проведем доказательство для случая $(D^\alpha_+ f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ имеем

$$\left|(D_+^\alpha f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_0^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\left|\int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| + \left|\int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right|\right). \qquad (3)$$

Сначала оценим первое слагаемое в (3).

$$\left|\int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le 2\|f\|_{C(R_+)}\int_0^h \frac{1}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}\,|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha}. \qquad (4)$$

Для оценки второго слагаемого в (3) сначала отметим, что

$$f(x)-f(tx) = \int_{tx}^{x} f'(u)du \ .$$

Тогда

$$\left|\int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_h^1\int_{tx}^{x} \frac{f'(u)du}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \|f'\|_{L_\infty(R_+)}\, x\int_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}}{\alpha}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt. \qquad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), для каждого $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ получим неравенство (1).

Пусть $x \in R_+$ и $0 < h < 1$, имеем:

$$\left\|g_{x,h}^+\right\|_{C(R_+)} = \frac{1-h}{2}x$$

и

$$\left\|\left(g_{x,h}^+\right)'\right\|_{L_\infty(R_+)} = 1.$$

Далее

$$\left|(D_+^\alpha g_{x,h}^+)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^1 \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^h \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} + \int_h^1 \frac{g_{x,h}^+(x)-g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left((1-h)x\int_0^h \frac{dt}{|\ln t|^{1+\alpha} t} + x\int_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{(1-h)x}{\alpha}|\ln h|^{-\alpha} + \frac{x}{\alpha}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|g_{x,h}^+\|_{C(R_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|g_{x,h}^+\|_{L_\infty(R_+)}\int_h^1\left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha}\right)dt\right).$$

Таким образом, для любых $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ функция $g_{x,h}^+$ обращает неравенство (1) в равенство.

Рассмотрим теперь случай $(D_-^\alpha f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $h > 1$, действуя, как и при оценке $\left|(D_+^\alpha f)(x)\right|$, имеем

$$\left|(D_-^\alpha f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_1^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| + \left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right|\right). \tag{6}$$

Сначала оценим второе слагаемое в (6).

$$\left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le 2\|f\|_{C(R_+)}\int_h^\infty \frac{dt}{(\ln t)^{1+\alpha} t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\alpha}(\ln h)^{-\alpha}. \tag{7}$$

Теперь перейдем к оценке первого слагаемого.

$$\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_1^h\int_{tx}^x \frac{f'(u)du}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\leq \|f'\|_{L_\infty(R_+)} x \int_1^h \frac{(t-1)}{(\ln t)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{x\|f'\|_{L_\infty(R_+)}}{\alpha} \int_1^h \left(|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha} \right) dt. \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), для каждого $x \in R_+$ и $h > 1$ получим неравенство (2).

Аналогично доказательству точности неравенства (1) проверяется, что неравенство (2) при любых $x \in R_+$ и $h > 1$ обращается в равенство для функции $\bar{g}_{x,h}$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи/ В.В. Арестов// Усп. мат. наук – 1996. – 51, № 6. – С. 88 – 124.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными/ В.В. Арестов, В.Н. Габушин// Известия вузов. Математика. 1995. – № 11. С. 44 – 66.
3. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения/ В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов – К., 2003. – 590 с.
4. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку/ В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурілова// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2001, вип.. 6. – С. 16 – 20.
5. **Гейсберг С.П.** Обощение неравенства Адамара. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций/ С.П. Гейсберг// Сб. Науч. Тр. ЛМИ. – 1965. – 50. – С.42 – 54.
6. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск, 1987. – 650 с.
7. **Чурілова М.С.** Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук/ М.С. Чурілова – Д., 2006. – 150 с.
8. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line/ V.V. Arestov// Approximation theory, Banach center publications– 1979. – Vol. 4. – P. 19 – 34.
9. **Magaril-Il'yaev G.G.** On the Kolmogorov for fractional derivatives on the half-line/ G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov// Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37 – 47.

Надійшла до редколегії 15.02.09