УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

Днепропетровский университет экономики и права

***Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ НА ПРЯМОЙ

Одержано нерівності типу Джексона для найкращих середньоквадратичних наближень диференційованих функцій цілими функціями скінченого ступеня на прямій.

Под $L_2 := L_2(R)$, где $R := \{x : -\infty < x < \infty\}$, понимаем пространство всех измеримых на R функций f, для которых

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(R)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty .$$

Через $L_2^r := L_2^r(R)$, $r \in N$, обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные (r−1)-го порядка $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны и $f^{(r)} \in L_2$. Символом $B_{\sigma,2}$, $0 < \sigma < \infty$, обозначим сужение на R множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству L_2. Величину

$$A_\sigma(f) := \inf\{\|f - g_\sigma\| : g_\sigma \in B_{\sigma,2}\},\ 0 < \sigma < \infty ,$$

называют наилучшим приближением элемента $f \in L_2$ множеством $B_{\sigma,2}$. Для произвольного класса $M \in L_2$ полагаем

$$A_\sigma(M) := \sup\{A_\sigma(f) : f \in M\}.$$

Модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$ называют величину

$$\omega_k(f,t) := \sup\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\| : |h| \le t\},\ 0 < t < \infty ,$$

где $\Delta_h^k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$ – конечная разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Впервые вопросы аппроксимации функций на прямой R начал изучать С. Н. Бернштейн, использовавший для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. Различные аспекты данной проблемы в последующем нашли свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, С. Н. Никольского, А. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, Г. Г. Магарил-Ильяева и многих других.

Основным утверждением данной статьи является следующая теорема

Теорема. *Для любых* $0 < t \le \pi/(2\sigma)$ *и произвольных* $k \in N$ и $r \in Z_+$ *имеют место следующие равенства*

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(f)}{\left(\int\limits_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k} : f \in L_2^r\right\} = \left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k}. \tag{1}$$

Если $0 < t \le \pi/\sigma$, *то справедливы следующие неравенства*

$$\frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}} \le \sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r\right\} \le \frac{1}{\sigma^{2r}}\left\{\frac{1}{(\sigma t)^2}+\frac{1}{2}\right\}^k. \tag{2}$$

В случае r=0 $L_2^0 \equiv L_2$ *и* sup *вычисляется по всем функциям* $f \in L_2$, *которые не эквивалентны нулю.*

Доказательство. Известно [3] – [4], что для произвольного элемента $f \in L_2$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma(f) \in B_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства L_2 и имеет вид

$$\Lambda_\sigma(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}\chi_\sigma(\tau)F(f,\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ix\tau}F(f,\tau)d\tau,$$

где F(f)– преобразование Фурье функции f, χ_σ–характеристическая функция множества $(-\sigma,\sigma)$. Для квадрата наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f \in L_2$ множеством $B_{\sigma,2}$ запишем [5]

$$A_\sigma^2(f) = \inf\left\{\left\|f(\cdot) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{i(\cdot)\tau}\gamma(\tau)d\tau\right\|^2 : \gamma \in L_2(-\sigma,\sigma)\right\} = \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |F(f,\tau)|^2 d\tau. \tag{3}$$

Рассмотрим произвольную функцию f, которая принадлежит множеству L_2^r. Поскольку

$$\Delta_h^k f^{(r)}(x) = \frac{i^r}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau^r(e^{i\tau h}-1)^k F(f,\tau)e^{i\tau x}d\tau,$$

то в силу равенства Парсеваля получаем

$$\left\|\Delta_h^k f^{(r)}(\cdot)\right\|^2 = 2^k\left\|\tau^r F(f,\tau)(1-\cos\tau h)^{k/2}\right\|^2 =$$

$$= 2^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau^{2r}|F(f,\tau)|^2(1-\cos\tau h)^k d\tau. \tag{4}$$

Используя (3), имеем

$$A_\sigma^2(f)-\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2\cos\tau h d\tau=$$
$$=\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^{2-2/k}|F(f,\tau)|^{2/k}(1-\cos\tau h)d\tau. \qquad (5)$$

Применив к правой части равенства (5) неравенство Гельдера и воспользовавшись определением модуля непрерывности k-го порядка и формулой (4), запишем
$$A_\sigma^2(f)-\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2\cos\tau h d\tau\le$$
$$\le\left\{\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2d\tau\right\}^{1-1/k}\left\{\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2(1-\cos\tau h)^k d\tau\right\}^{1/k}\le$$
$$\le A_\sigma^{2-2/k}(f)\left\{\frac{1}{\sigma^{2r}}\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{2r}|F(f,\tau)|^2(1-\cos\tau h)^k d\tau\right\}^{1/k}\le A_\sigma^{2-2/k}\frac{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)}{2\sigma^{2r/k}}. \qquad (6)$$

Проинтегрируем неравенство (6) по переменной h в пределах от 0 до t, где $0<t\le\pi/(2\sigma)$,
$$tA_\sigma^2(f)-\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2\frac{\sin\tau t}{\tau}d\tau\le\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}}\int\limits_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau.$$

Отсюда имеем
$$A_\sigma^2(f)\le\int\limits_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2\left|\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right|d\tau+\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}t}\int\limits_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau. \qquad (7)$$

Поскольку
$$\max\left\{\frac{|\sin u|}{u}:t\sigma\le u,\ 0<t\sigma\le\frac{\pi}{2}\right\}=\frac{\sin t\sigma}{t\sigma},$$

то из (7) получаем
$$A_\sigma^2(f)\le\frac{\sin t\sigma}{t\sigma}A_\sigma^2(f)+\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}t}\int\limits_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau.$$

Следовательно,
$$A_\sigma^2(f)\le\left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^k\sigma^{-2r}\left(\int\limits_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k.$$

Отсюда получаем оценку сверху для $0<t\le\pi/(2\sigma)$
$$\sup\left\{\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(f)}{\left(\int\limits_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}:f\in L_2^r\right\}\le\left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k}. \qquad (8)$$

Для получения оценки снизу выражения, записанного в левой части неравенства (8), рассмотрим как и в [8], целую функцию экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\sigma$ – произвольное число

$$\Psi_\varepsilon(x):=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin x(\sigma+\varepsilon)}{x}-\frac{\sin x\sigma}{x}\right\}.$$

Поскольку преобразование Фурье F функции $\frac{\sin ax}{x}$, $a>0$, равно $\sqrt{\pi/2}$ при $|x|<a$, равно $(\sqrt{\pi}/2)/2$ при $|x|=a$ и равно 0 при $|x|>a$, то

$$F(\Psi_\varepsilon,x)=\begin{cases}1, \text{если } \sigma<|x|<\sigma+\varepsilon,\\ 1/2, \text{если } |x|=\sigma+\varepsilon \text{ или } |x|=\sigma,\\ 0, \text{если } |x|>\sigma+\varepsilon \text{ или } |x|<\sigma.\end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что для функции $\Psi_\varepsilon\in L_2^r$ в силу (3) и (9) имеем

$$A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)=2\varepsilon. \tag{10}$$

Так как $F(\Psi_\varepsilon^{(r)},x)=(ix)^r F(\Psi_\varepsilon,x)$, то на основании (4) запишем

$$\left\|\Delta_h^k\Psi_\varepsilon^{(r)}(\cdot)\right\|^2=2^{k+1}\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}t^{2r}(1-\cos\tau h)^k d\tau\le 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1-\cos(\sigma+\varepsilon)h)^k.$$

Следовательно,

$$\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)\le 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1-\cos(\sigma+\varepsilon)\tau)^k, \tag{11}$$

где $0<\tau\le\pi/(2\sigma)$. Проинтегрировав обе части неравенства (11) по τ в пределах от 0 до t, $t\in(0,\pi/(2\sigma)]$, получаем

$$\int_0^t\omega_k^{2/k}(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)d\tau\le 2^{1+1/k}\varepsilon^{1/k}(\sigma+\varepsilon)^{2r/k}\left(t-\frac{\sin t(\sigma+\varepsilon)}{\sigma+\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Тогда, с учетом (10) и (12), запишем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(f)}{\left(\int_0^t\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}:f\in L_2^r\right\}\ge\frac{\sigma^{2r}A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\left(\int_0^t\omega_k^{2/k}(\Psi_\varepsilon^{(r)},\tau)d\tau\right)^k}\ge$$

$$\ge U_\varepsilon:=\left(1+\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{-2r}\left\{\frac{1-\frac{\sin t\sigma}{t\sigma}}{1-\frac{\sin t(\sigma+\varepsilon)}{t(\sigma+\varepsilon)}}\right\}^k\left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k}. \tag{13}$$

Поскольку для любого числа $\delta>0$ можно выбрать такое число $\varepsilon_*:=\varepsilon(\delta)\in(0,\delta)$, что

$$U_{\varepsilon_*}>\left\{2t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-k}-\delta, \tag{14}$$

то в силу определения точной верхней грани множества и на основании соотношений(8) и (13) – (14) получаем требуемое равенство (1).

Перейдем к доказательству соотношения (2). Для этого проинтегрируем дважды неравенство (6) вначале по h в пределах от 0 до v, а затем по v в пределах от 0 до t, $0<t<\pi/\sigma$. В результате этого получаем соотношение

$$\frac{t^2}{2}A_\sigma^2(f)\le\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)d\tau+\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2r/k}}\int_0^t\int_0^v\omega_k^{2/k}(f^{(r)},h)dhdv. \tag{15}$$

Используя (3) – (4), определение модуля непрерывности k-го порядка и неравенство Гельдера, запишем оценку сверху первого слагаемого в правой части неравенства (15)

$$\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)d\tau=\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{-2}|F(f,\tau)|^{2-2/k}|F(f,\tau)|^{2/k}(1-\cos t\tau)d\tau\le$$

$$\le\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{\sigma^2}\left\{\int_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)^k d\tau\right\}^{1/k}\le$$

$$\le\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{\sigma^{2r}}\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{2r}|F(f,\tau)|^2(1-\cos t\tau)^k d\tau\right\}^{1/k}\le\frac{A_\sigma^{2-2/k}(f)}{2\sigma^{2+2r/k}}\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t). \tag{16}$$

Произведя в повторном интеграле, записанном в правой части неравенства (15), процедуру интегрирования по частям и учитывая (16), перепишем неравенство (15) в следующем виде

$$t^{2k}A_\sigma^2(f)\le\frac{1}{\sigma^{2(k+r)}}\left\{\omega_k^{2/k}(f^{(r)},t)+\sigma^2\int_0^t(t-\tau)\omega_k^{2/k}(f^{(r)},\tau)d\tau\right\}^k.$$

Отсюда получаем

$$t^{2k}A_\sigma^2(f)\le\frac{1}{\sigma^{2(k+r)}}\omega_k^2(f^{(r)},t)\left\{1+\frac{(\sigma t)^2}{2}\right\}^k.$$

Следовательно, для $0<t\le\pi/\sigma$ имеем

$$\sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)}:f\in L_2^r\right\}\le\frac{1}{\sigma^{2r}}\left\{\frac{1}{(\sigma t)^2}+\frac{1}{2}\right\}^k. \tag{17}$$

Для получения оценки снизу выражения, записанного в левой части неравенства (17), воспользуемся рассмотренным ранее множеством целых функций Ψ_ε, $0 < \varepsilon < \sigma$, экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$, принадлежащих классу L_2^r. Тогда

$$\sup\left\{\frac{A_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r\right\} \geq \sup\left\{\frac{A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t)} : \varepsilon \in (0,\sigma)\right\}. \qquad (18)$$

Из (11) получаем

$$\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t) \leq 2\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2(k+r)}t^{2k}. \qquad (19)$$

Используя (10) и (19), запишем

$$\frac{A_\sigma^2(\Psi_\varepsilon)}{\omega_k^2(\Psi_\varepsilon^{(r)},t)} \geq V_\varepsilon := \left(\frac{1}{1+\varepsilon/\delta}\right)^{2(r+k)} \frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}}. \qquad (20)$$

Поскольку

$$\sup\{V_\varepsilon : \varepsilon \in (0,\sigma)\} = \frac{1}{\sigma^{2r}(\sigma t)^{2k}}, \qquad (21)$$

то с учетом(17) – (18) и (20) – (21) получаем требуемое соотношение (2). Теорема доказана.

В заключение отметим, что в ходе доказательства данного утверждения были использованы некоторые идейные моменты, содержащиеся в [1; 2; 6 – 8].

Библиографические ссылки

1. **Вакарчук, С. Б.** Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 / С. Б. Вакарчук // Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – № 1. – С. 11 – 19.
2. **Вакарчук, С. Б.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т. 56. – № 11. – С. 1358 – 1466.
3. **Ибрагимов, И. И.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени / И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 194. – № 5. – С. 1013 – 1016.
4. **Насибов, Ф. Г.** О приближении в L_2 целыми функциями / Ф. Г. Насибов // Доклады АН Азерб. ССР. – 1986. – Т. 42. – № 4. – С. 3 – 6.
5. **Попов, В. Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа / В. Ю. Попов // Известия вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 78.
6. **Тайков, Л. В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 / Л. В. Тайков // Математические заметки. – 1976. – Т. 20. – № 3. – С. 433 – 438.
7. **Шалаев, В. В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков / В. В. Шалаев // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 43. – № 1. – С. 125 – 129.
8. **Vakarchuk, S. B.** Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes / S. B. Vakarchuk // East J. Approxim. – 2004. – Vol. 10. – № 1 – 2. – P. 27 – 39.

Надійшла до редколегії 15.03.09.