УДК 517.5

С.В. Гончаров
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ L^p_ρ

Отримано варіант посилення аналога теореми Джексона про наближення на відрізку алгебраїчними поліномами в інтегральній метриці для деяких класів інтегровних з вагою $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ функцій.

Пусть $\alpha,\beta>-1$; $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ – весовая функция, определённая на интервале $(-1;1)$. $L^p_\rho[-1;1]$ для $p\ge 1$ (далее – L^p_ρ) – пространство функций $f:[-1;1]\to R$, для которых $\exists\|f\|_{L^p_\rho}=\left(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$.

Если $\alpha=\beta=0$, то $L^p_\rho=L_p$. Класс функций $H_p^{(r+\nu)}$ ($r\in Z_+$, $0<\nu\le 1$) есть $\left\{f\in L_p:\exists f^{(r)}\in L_p,\forall h\in(0;1)\left\|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)\right\|_{L_p[-1;1-h]}\le h^\nu\right\}$. В [2] получено следующее усиление аналога теоремы Джексона в метрике L_p [2, теорема 7]:

Если функция $f(x)$ *принадлежит классу* $H_p^{(r+\nu)}$, *то существует постоянная* C_r, *зависящая только от* r, *такая, что для любого* $n\ge r$ *найдётся алгебраический полином степени* $\le n$, *удовлетворяющий неравенство:* $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r+\nu}}\right\|_{L_p}\le C_r\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{r+\nu}}$. *Если в левой части заменить* ν *на* $\mu\in[0;\nu)$, *то правую можно заменить на* $C'_{r;\mu}n^{-r-\nu}$.

Данная работа содержит частичное обобщение этого результата (теорема 5) для $\alpha,\beta>-1$, полученное, в основном, проведением рассуждений по исходным схемам с дополнительными модификациями, учитывающими функцию веса. Узловые вспомогательные утверждения, таким образом, в свою очередь, обобщают прототипы, взятые преимущественно из [2; 3; 4; 5]. Для выделения таких ссылок на прототипы используется символ «$\cong$».

Символы типа $C, C_2, C'', \tilde{C}_{\beta;p},\ldots$ обозначают константы, абсолютные или зависящие от (некоторых из) величин α,β,p,r,ν,μ.

Рассматриваемое обобщение является частичным, поскольку при $r>0$ возникают добавочные ограничения: $p\ge 1+2\alpha\ge 0, p\ge 1+2\beta\ge 0$.

Итак, пусть $\alpha,\beta>-1$; $p\geq 1$, $r\in Z_+$, $0<\nu\leq 1$, $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Класс функций $M\hat{H}^{(r+\nu)}_{p,\rho}:=\{f\in L^p_\rho[-1;1]:\exists f^{(r)}\in L^p_\rho[-1;1], f^{(r)}\in L_1[-1;1], \forall h\in(0;1)$

$$\left(\int_{-1}^{1-h}\left|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\left(\int_{-1+h}^{1}\left|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x-h)\right|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq Mh^\nu\}.$$

При $\alpha,\beta\leq 0$ условие $f^{(r)}\in L_1$ избыточно как следствие условия $f^{(r)}\in L^p_\rho$.

Пусть $\varphi_h(t):=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(u)du, -1\leq t\leq 1-h, 0<h<1$.

Для $\forall f\in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$ $(r=0)$ простым следствием этих определений и обобщённого неравенства Минковского является

Лемма 1 ($\cong$ [4, лемма 3]). $I_1=\left(\int_{-1+h}^{1-h}\left|f(t)-\varphi_h(t)\right|^p(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq Mh^\nu$.

$\forall f\in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$ $(r=0)$, $F_n(f;x):=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt, \forall x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right), k=\overline{-n,n-1}$.

Лемма 2 ($\cong$ [4, лемма 4]). $I_2=\left(\int_{-1+n^{-1}}^{1-n^{-1}}\left|\varphi_{\frac{1}{n}}(t)-F_n(f;t)\right|^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq C_{\alpha;\beta}Mn^{-\nu}$.

Доказательство. $I_2=\left(\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|n\int_t^{t+\frac{1}{n}}f(u)du-n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du\right|^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq$

$\leq n\left(\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|du\right)^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$. Если $p>1$, по неравенству

Гёльдера $I_2\leq n^{\frac{1}{p}}\left(\underbrace{\sum_{k=-n+1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(u+\frac{1}{n}\right)-f(u)\right|^p du\cdot\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt}_{S}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Разобьём S на $\Sigma_1=\sum_{k=-n+1}^{-1}(\ldots)$ и $\Sigma_2=\sum_{k=0}^{n-2}(\ldots)$. Рассмотрим Σ_2: $u,t\geq 0$. Для $x\in[0;1)\subseteq[-0.5;1)$ $(1-x)^\alpha\min\{2^{-\beta};2^\beta\}\leq\rho(x)\leq(1-x)^\alpha\max\{2^{-\beta};2^\beta\}$, и если

$\alpha<0$, то $\Sigma_2 \le \widehat{C}_\beta \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right) - f(u)\right|^p (1-u)^\alpha du \cdot \underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-\alpha} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (1-t)^\alpha dt}_{A_k}$.

$A_k \le n^{-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-\alpha}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^\alpha = n^{-1}\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^\alpha \le 2^{-\alpha} n^{-1}$, откуда $\Sigma_2 \le C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \times$
$\times \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right) - f(u)\right|^p \rho(u) du$. Аналогичная оценка верна при $\alpha \ge 0$; то же для

Σ_1, $\forall \beta > -1$, поэтому $I_2 \le \widetilde{C}_{\alpha;\beta}\left(\int_{-1+n^{-1}}^{1-n^{-1}} \left| f\left(u+\frac{1}{n}\right) - f(u)\right|^p \rho(u) du\right)^{\frac{1}{p}} \le \widetilde{C}_{\alpha;\beta} M n^{-\nu}$.

Лемма 3⁺ ($\cong$ [4, лемма 2]). $I_3 = \int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}}^{1} |f(x)-f(y)|^p dx \cdot \rho(y) dy \le 2M^p n^{-1-\nu p}$.

Доказательство. После замены во внутреннем интеграле $u = x-y, du = dx$ получаем:

$$I_3 = \int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}-y}^{1-y} |f(u+y)-f(y)|^p \rho(y) du dy = \int_{-n^{-1}}^{0} \int_{1-n^{-1}-u}^{1} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du +$$

$+ \int_{0}^{n^{-1}} \int_{1-n^{-1}}^{1-u} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du$. Делая в 1-м интеграле замену переменной

$v=-u$, $I_3 \le \int_{0}^{n^{-1}} \int_{1-n^{-1}+v}^{1} |f(y)-f(y-v)|^p \rho(y) dy dv + \int_{0}^{n^{-1}} \int_{-1}^{1-u} |f(y+u)-f(y)|^p \rho(y) dy du \le$

$\le \int_{0}^{n^{-1}} \int_{-1+v}^{1} |f(y)-f(y-v)|^p \rho(y) dy dv + \int_{0}^{n^{-1}} \left(Mu^\nu\right)^p du \le 2M^p \int_{0}^{n^{-1}} u^{\nu p} du \le 2M^p n^{-1-\nu p}$.

Лемма 3⁻. $I_3 = \int_{-1}^{-1+n^{-1}} \int_{-1}^{-1+n^{-1}} |f(x)-f(y)|^p dx \cdot \rho(y) dy \le 2M^p n^{-1-\nu p}$.

Теорема 1 ($\cong$ [5, лемма 4]). $\forall f \in M\hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$ $\quad \|f - F_n(f)\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu}$.

Доказательство. Так как $[-1;1] = [-1;-1+n^{-1}] \cup [-1+n^{-1}; 1-n^{-1}] \cup [1-n^{-1};1]$ и $|f(x) - F_n(f;x)| \le |f(x) - \varphi_{n^{-1}}(x)| + |\varphi_{n^{-1}}(x) - F_n(f;x)|$, то с учётом лемм 1 и 2, а также неравенства Гёльдера, если $p>1$, $I = \|f - F_n(f)\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu} +$

$$+ C_p n^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_{-1}^{-1+n^{-1}} \int_{-1}^{-1+n^{-1}} |f(x)-f(t)|^p dt \cdot \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{1-n^{-1}}^{1} \int_{1-n^{-1}}^{1} |f(x)-f(t)|^p dt \cdot \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Вследствие лемм 3⁺,3⁻ $I \le C_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu} + 2C_p n^{\frac{1}{p}} \left(2M^p n^{-1-\nu p}\right)^{\frac{1}{p}} = \widetilde{C}_{\alpha;\beta;p} M n^{-\nu}$.

Введём разбиение ([2, §3]) отрезка $[-1;1]$: $\forall n \in N$, пусть a_i таковы, что:

«а») $a_0 = 0, a_{i+1} = a_i + K_i\left(n \cdot 2^i\right)^{-1}$, где $K_i \in N$; «б») $\sqrt{1-a_i^2} > 2^{-i}$;

«в») $\sqrt{1-\left(a_i + \left(n \cdot 2^{i-1}\right)^{-1}\right)^2} \le 2^{-i}$; $i = 1,2,\ldots,[\log_2 n]$; $a_{[\log_2 n]+1} := 1$; $a_{-i} = -a_i$.

Разобьём $[a_i; a_{i+1}]$ на отрезки длины $\left(n \cdot 2^i\right)^{-1}$; полученные точки вместе с a_i обозначим x_j; $x_j < x_{j+1}$, $j = \overline{0, N+1}$; $x_0 = -1, x_{N+1} = 1$. Если $\tau_i := \arccos x_i$, то $\frac{1}{2n} < |\tau_i - \tau_{i+1}| < \frac{2}{n}$ ([2, §3]); $\sin\tau_i = \sqrt{1-x_i^2}$. $E_k := [a_k; a_{k+1}) \cup (a_{-(k+1)}; a_{-k}]$, $k \ge 0$.

Пусть снова $f \in \hat{H}^{(v)}_{p,\rho}$, а $F_{\tilde{n}}(f;x) := F_{n \cdot 2^k}(f;x)$, $\forall x \in E_k$.

Теорема 2 ($\cong$ [2, теорема 5]). $\forall f \in \hat{H}^{(v)}_{p,\rho}$: $\left\| \frac{f - F_{\tilde{n}}(f)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p} \ln^{\frac{1}{p}} n$.

Доказательство. Оценим $I = \left\| \frac{f - F_{\tilde{n}}(f)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right\|^p_{L^p_\rho} = \sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \int_{E_k} \left| \frac{f(x) - F_{\tilde{n}}(f;x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^v} \right|^p \rho(x)dx$.

По теореме 1 $\int_{E_k} \left|f(x) - F_{n \cdot 2^k}(f;x)\right|^p \rho(x)dx \le \int_{[-1;1]} |\ldots|^p \rho(x)dx \le C_{\alpha;\beta;p}\left(n \cdot 2^k\right)^{-vp}$.

Для $k < [\log_2 n]$, на E_k $\sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-a_{k+1}^2} > 2^{-k-1}$ (свойство «б»), откуда $\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{-v} \le \left(n \cdot 2^{k+1}\right)^v$; на $E_{[\log_2 n]}$ $n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2} > n^{-2}$, поэтому $\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{-v} \le \left(n \cdot 2^{[\log_2 n]+1}\right)^v$. Значит, $I \le C_{\alpha;\beta;p} \sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \left(n \cdot 2^{k+1}\right)^{vp} \cdot \left(n \cdot 2^k\right)^{-vp} =$

$= \hat{C}_{\alpha;\beta;p}\left([\log_2 n]+1\right) \le C'_{\alpha;\beta;p} \ln n$, что эквивалентно утверждению теоремы.

Лемма 4 ([1, лемма 3]). $\forall n \in N, \forall z \in [-1;1]$ существует алгебраический полином $\Omega_z(x)$ степени, не превосходящей $2mn$, такой, что $\forall x \in [-1;1]$ $\left|\theta_z(x) - \Omega_z(x)\right| \le \frac{A(m)}{\left(1+n\left|\arccos x - \arccos z\right|\right)^{2m-1}}$, где $\theta_z(x) = \theta(x-z)$ ($\theta(x) = I_{[0;+\infty)}(x)$ – функция Хевисайда); $m \in N$ фиксировано; $A(m)$ зависит от m.

Рассмотрим ($\cong$ [2, теорема 6]) полином $P_n(x)$ степени $\le 2mn$ (m – фиксированное число, будет выбрано позднее): $P_n(x) := \tilde{L}_{n,0} + \sum_{j=1}^{N} \Omega_{x_j}(x) \Delta\tilde{L}_{n,j}$,

где $\Omega_{x_j}(x)$ – полиномы из леммы 4, а $\Delta\tilde{L}_{n,j} = \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)dt$, $j > 0$;

$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$; $\tilde{L}_{n,0} = \frac{1}{\Delta x_0}\int_{-1}^{x_1} f(t)dt$.

Оценим $D=\left\|\frac{F_{\tilde n}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{v}}\right\|^p_{L^p_\rho}=\sum_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right)\Delta\tilde L_{n,j}}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{v}}\right|^p\rho(x)dx$.

$(\Omega_{x_0}(x)\equiv 1=\theta_0(x))$. $\left|\sin\tau_{i,n}-\sin\tau_{i+1,n}\right|\le\left|\tau_{i,n}-\tau_{i+1,n}\right|<2n^{-1}\Rightarrow\frac{n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}}{n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}}\le$
$\le\frac{\sqrt{1-x_i^2}+n^{-1}}{\sqrt{1-x_{i+1}^2}+n^{-1}}=\frac{\sin\tau_{i,n}+n^{-1}}{\sin\tau_{i+1,n}+n^{-1}}\le 3$; заменив знаменатель на $\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{v}$,

$$D\le C_{p;v}\sum_i\frac{1}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{vp}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_j\left(\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right)\Delta\tilde L_{n,j}\right|^p\rho(x)dx\le$$

$$\le C_{p;v}\sum_i\frac{1}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{vp}}\left(\sum_j\left|\Delta\tilde L_{n,j}\right|\cdot\sup_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|\theta_j(x)-\Omega_{x_j}(x)\right|\right)^p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\rho(x)dx.$$

Оценим $\sum_{i:\,x_i\ge 0}(\ldots)$; вторая часть суммы оценивается аналогично.

$\left(n^{-1}\sqrt{1-x_i^2}+n^{-2}\right)^{vp}\ge n^{-vp}\sin^{vp}\tau_{i,n}$; докажем, что $W=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\rho(x)dx\le C_{\alpha;\beta}\frac{\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}}{n}$.

Предварительно заметим, что $\sqrt{1-a_k^2}<2^{-k+2}$, $k=\overline{0,[\log_2 n]}$: если $k=0$, это очевидно, а для $k>0$ условие «в» можно переписать в виде

$$1-a_k^2\le 4^{1-k}\left(0.25+\frac{a_k\cdot 2^k}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\le 4^{1-k}\left(1.25+a_k\cdot\frac{2^k}{n}\right)<4\cdot 4^{-k+1}.$$

1) $\alpha<0$: $[x_i;x_{i+1}]\subset[a_{k-1};a_k]$; $W\le\hat C_\beta\int_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k}(1-x)^\alpha dx$.

а) $a_k<1$ $(k\le[\log_2 n])$: $W\le C_{\alpha;\beta}\left(n\cdot 2^{k-1}\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{2\alpha}\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{1+2\alpha}$.

а-1) $\alpha\ge-\frac12$: $W\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

а-2) $-1<\alpha<-\frac12$: $\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}\ge C'''_{\alpha;\beta}\left(\sqrt{1-a_{k-1}^2}\right)^{1+2\alpha}\ge\overline{C'''_{\alpha;\beta}}\cdot 2^{-k(1+2\alpha)}$,

и $W\le C''_{\alpha;\beta}n^{-1}\cdot 2^{(-k)(1+2\alpha)}\le\tilde C'''_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

б) $a_k=1$ $(k=[\log_2 n]+1)$: $\sin\tau_{i,n}\ge\sqrt{1-x_{N,n}^2}=\sqrt{1-\left(1-\left(n\cdot 2^{[\log_2 n]}\right)^{-1}\right)^2}\ge\frac1n$. То есть $\sin\tau_{N,n}\ge n^{-1}$; поэтому, учитывая поведение $\sin\arccos x$,

$$\sin\tau_{l,n}\ge n^{-1},\quad l=\overline{1,N} \qquad (F)$$

и $W\le\hat C_\beta\int_0^{(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}t^\alpha dt=C_{\alpha;\beta}\left(n\cdot 2^{[\log_2 n]}\right)^{-1-\alpha}\le C'_{\alpha;\beta}n^{-2-2\alpha}$. Если $\alpha\ge-\frac12$, то $W\le C'_{\alpha;\beta}n^{-1}\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$, а если $-1<\alpha<-\frac12$, то аналогично (а-2) в (а) $\sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}\ge$

$\geq \overline{C'''_{\alpha;\beta}} \cdot 2^{-([\log_2 n]+1)(1+2\alpha)} \geq \overline{C'''_{\alpha;\beta}} n^{-1-2\alpha}$, и опять $W \leq C''_{\alpha;\beta} n^{-1} \sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

2) $\alpha \geq 0$: $[x_i; x_{i+1}] \subset [a_{k-1}; a_k]$; $W \leq \widehat{C}_\beta \int\limits_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+(n\cdot 2^{k-1})^{-1}} (1-x)^\alpha dx \leq$

$\leq C_{\alpha;\beta}\left(n \cdot 2^{k-1}\right)^{-1}\left(\sqrt{1-a_{k-1}^2}\right)^{2\alpha} \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-1} 2^{-k(1+2\alpha)}$.

а) $a_k < 1$: $W < C'_{\alpha;\beta} n^{-1}\left(\sqrt{1-a_k^2}\right)^{1+2\alpha} < C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \sin^{1+2\alpha}\tau_{i,n}$.

б) $a_k = 1$: $W \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-1} \cdot 2^{-([\log_2 n]+1)(1+2\alpha)} \leq C'_{\alpha;\beta} n^{-2-2\alpha}$, далее – как в случае $\alpha < 0$.

$D \leq C \sum\limits_i \frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n}}{n^{1-\nu p}} (\sum\limits_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right| \cdot \sup\limits_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left|\theta_j(x) - \Omega_{x_j}(x)\right|)^p$. Вследствие выбора $\Omega_{x_j}(x)$ $\left|\theta_j(x) - \Omega_{x_j}(x)\right| \leq A(m)\left(1 + n\left|\arccos x - \arccos x_j\right|\right)^{-(2m-1)}$. Пусть $\arccos x = \tau$, тогда $\tau \in [\tau_{i+1,n}; \tau_{i,n}]$. $\frac{1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|}{1+n|\tau-\tau_{j,n}|} \leq 1 + \frac{n|\tau_{i,n}-\tau|}{1+n|\tau-\tau_{j,n}|} \leq 1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{i+1,n}\right| \leq 3$, поэтому $D \leq Cn^{\nu p-1} \sum\limits_i \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n} (\sum\limits_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right| \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-(2m-1)})^p$. Если $p = 1$, $D \leq Cn^{\nu p-1} \sum\limits_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^1 \sum\limits_i \sin^{1+2\alpha-\nu\cdot 1}\tau_{i,n} \cdot \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5(2m-1)}$; если $p > 1$, по неравенству Гёльдера $(\sum\limits_j \frac{|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{2m-1}})^p = (\sum\limits_j \frac{|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}}})^p \leq$

$\leq \sum\limits_j \frac{|\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \cdot (\sum\limits_j \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}q}})^{\frac{p}{q}}$; $\left|\tau_{i,n} - \tau_{i+1,n}\right| > \frac{1}{2n} \Rightarrow$ для достаточно больших m $\sum\limits_j \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}q} \leq 2 \cdot 2^{\frac{2m-1}{2}q} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2+k)^{-\frac{2m-1}{2}q} = C_{m;q}$ – тогда

$$D \leq C' n^{\nu p-1} \sum_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sum_i \frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n}}{\left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{\frac{2m-1}{2}p}} = C(\overbrace{n^{\nu p-1} \sum_{j:\, x_{j,n}<0} (\ldots)}^{\Sigma_-} + \overbrace{n^{\nu p-1} \sum_{j:\, x_{j,n}\geq 0} (\ldots)}^{\Sigma_+}).$$

А. Σ_+ (для краткости будем писать $\sum\limits_j (\ldots)$ вместо $\sum\limits_{j:\, x_{j,n}\geq 0} (\ldots)$)

1) $1 + 2\alpha - \nu p \geq 0$. Учитывая, что $\forall i,j \quad \sin\tau_{i,n} \leq \sin\tau_{j,n} + \left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|$,

$$\Sigma_+ \leq C''' \Bigg(n^{\nu p-1} \sum_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n} \sum_i \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}p} +$$

$+ n^{\nu p-1} \cdot n^{-1-2\alpha+\nu p} \sum\limits_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sum\limits_i \left(1 + n\left|\tau_{i,n} - \tau_{j,n}\right|\right)^{-\frac{2m-1}{2}p+1+2\alpha-\nu p} \Bigg)$, и для достаточно больших m, так как по (F) $n^{-1-2\alpha+\nu p} \le \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$ $(1+2\alpha-\nu p \ge 0)$,

$$\Sigma_+ \le \overline{C}_{\alpha;\beta;p;\nu}\, n^{\nu p-1} \overbrace{\sum_j \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}}^{S}.$$

Оценим S. $\sum_j(\ldots) = \sum_{k=0}^{[\log_2 n]}\sum_{j\in J_k}(\ldots)$, где $J_k = \{j : [x_j; x_{j+1}) \subset E_k\}$. Пусть $\tau_{\bar{k},n} := \arccos a_k$. $\forall j \in J_k$ $\sin\tau_{j,n} \le \sin\tau_{\bar{k},n} = \sqrt{1-a_k^2} \le 4\cdot 2^{-k}$. Покажем, что $\exists C>0 : \forall j \in J_k$ $\sin\tau_{j,n} \ge C\cdot 2^{-k}$. При $k=[\log_2 n]$ это следует из (F), а если $k<[\log_2 n]$, то $\sin\tau_{j,n} = \sqrt{1-x_{j,n}^2} > \sqrt{1-a_{k+1}^2} > 0.5\cdot 2^{-k}$. Получили, что

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \forall j \in J_k \; C_1\cdot 2^{-k} \le \sin\tau_{j,n} \le C_2\cdot 2^{-k}. \qquad \text{(T)}$$

В $\sum_{j\in J_k}(\ldots)$ модуль первой разности, $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right| = |C - 0.5(A+B)|$, где $C = n\cdot 2^k \int_{a_k}^{a_k+(n\cdot 2^k)^{-1}} f(t)dt$, $A = n\cdot 2^k \int_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k-(n\cdot 2^k)^{-1}} f(t)dt$, $B = n\cdot 2^k \int_{a_k-(n\cdot 2^k)^{-1}}^{a_k} f(t)dt$. Легко видеть, что $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right| \le n\cdot 2^k \int_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right| dt$. Если $p>1$, по неравенству Гёльдера $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,\bar{j}_k}\right|^p \le \widehat{C}_p n\cdot 2^k \int_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_k} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p dt$. Аналогично, и для остальных $j \in J_k$ $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \le C'_p n\cdot 2^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p dt$. Значит, $\forall j \in J_k$

$$\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \le C''' n\cdot 2^k \left(\sin\tau_{l(j),n}\right)^{-2\alpha} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p \rho(t)dt \quad \left(l(j)=\begin{cases} j-1, & \alpha<0 \\ j, & \alpha \ge 0\end{cases}\right).$$

Применив (T), $\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{2\alpha}\tau_{j,n} \le \overline{C'''} n\cdot 2^k \int_{[x_{j-1};x_j]} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p \rho(t)dt$.

Оценив $\sin^{1-\nu p}\tau_{j,n}$ в J_k сверху по (T): $\sum_{j\in J_k}\left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n} \le$

$$\le C'_{\alpha;\beta;p;\nu} n\cdot 2^k\cdot 2^{-k(1-\nu p)} \int_{a_k-(n\cdot 2^{k-1})^{-1}}^{a_{k+1}-(n\cdot 2^k)^{-1}} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p \rho(t)dt \le$$

$$\le \widehat{C} n\cdot 2^{\nu pk} \int_{-1}^{1-(n\cdot 2^k)^{-1}} \left|f\left(t+\frac{1}{n\cdot 2^k}\right) - f(t)\right|^p \rho(t)dt \le \overline{C} n\cdot 2^{\nu pk}\left(\frac{1}{n\cdot 2^k}\right)^{\nu p} = \overline{C} n^{1-\nu p}.$$

Отсюда $S \le C([\log_2 n]+1) \le C_3 \ln n$, и $\Sigma_+ \le \widetilde{C} \ln n$.

2) $1+2\alpha-\nu p<0$. $\forall i,j$ таких, что $\sin\tau_{i,n} \ne 0, \sin\tau_{j,n} \ne 0$, выполняется неравенство: $(\sin\tau_{i,n})^{-1} \le (\sin\tau_{j,n})^{-1} + |\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|(\sin\tau_{i,n}\cdot\sin\tau_{j,n})^{-1}$. Следовательно,

$$\Sigma_+ \le \ddot{C}_{\alpha;\beta;p;\nu}(n^{\nu p-1}\sum_j |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\cdot\sum_i (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} +$$

$$+n^{2\alpha}\sum_j |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}\cdot\sum_i \frac{\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n}}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p+1+2\alpha-\nu p}}).$$ Ввиду (F)

$\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n} \le C_{\alpha;p;\nu} n^{\nu p-1-2\alpha}$, откуда $\Sigma_+ \le \ddot{C}_{\alpha;\beta;p;\nu} n^{\nu p-1}\sum_j |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n} \times$

$\times\sum_i ((1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} + (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)-1-2\alpha+\nu p})$; для

достаточно больших m $\Sigma_+ \le C' n^{\nu p-1}\sum_j |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n} = \dot{C}S$. Оценка S в

(1) не зависела от знака $1+2\alpha-\nu p$, поэтому $\Sigma_+ \le \widetilde{C}' \ln n$.

Б. Σ_-: $x_{j,n}<0$ (вновь для краткости пишем $\sum_j(\ldots)$ вместо $\sum_{j:\, x_{j,n}<0}(\ldots)$)

Вместо $\sin^{2\alpha}\tau_{j,n}$ получим множитель $\sin^{2\beta}\tau_{j,n}$ для аналогичных целей.

1) $1+2\alpha-\nu p \ge 0$: $\Sigma_- = \sum_{j:\, -1<x_{j,n}\le -0.5}(\ldots) + \sum_{j:\, -0.5<x_{j,n}<0}(\ldots) = \Sigma_-^- + \Sigma_-^+$.

а) Оценим Σ_-^-: $\Sigma_-^- \le n^{\nu p-1}\sum_{j:\, -1<x_{j,n}\le -0.5} |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sum_i (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)}$.

$\tau_{i,n} \le \frac{\pi}{2}$, а $\tau_{j,n} \ge \frac{2\pi}{3}$. Так как $|\tau_{i,n}-\tau_{i+1,n}| \ge \frac{1}{2n}$, то $1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}| \ge \frac{n+|i-z|}{4}$, где $\tau_{z,n} = \arccos 0 = 0.5\pi$. Тогда для достаточно больших m

$$\sum_i (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} \le C_{p;m}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)^{-0.5p(2m-1)} \le \overline{C}_{p;m} n^{-0.5p(2m-1)+1}.$$

Если $1+2\beta-\nu p \le 0$, то $\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n} \ge 1 \ge n^{-0.5p(2m-1)+1}$; значит, $\sum_i (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} \le C_p \sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$. А если $1+2\beta-\nu p>0$, то по (F) $\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n} \ge n^{-1-2\beta+\nu p}$; для достаточно больших m $n^{-0.5p(2m-1)+1} < n^{-1-2\beta+\nu p}$, и

$\sum_i (1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{-0.5p(2m-1)} \le C_{\beta;p;\nu}\sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$. Отсюда

$\Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1}\sum_{j:\, -1<x_{j,n}\le -0.5} |\Delta\widetilde{L}_{n,j}|^p \sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n} \le Cn^{\nu p-1}\sum_{j:\, -1<x_{j,n}\le 0}(\ldots)$, далее – как S в (А).

б) Оценим Σ_-^+. Начинаем, как для Σ_+ в (А): $\Sigma_-^+ \le \ldots \le \overline{C}S$, где

$S = n^{\nu p-1} \sum\limits_{j:\,-0.5<x_{j,n}<0} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$. В S при добавлении в интегралы $\rho(x)$ вне их возникнут множители вида $\sin^{-2\beta}\tau_{j,n}$; $\tau_{j,n} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\sin\tau_{j,n}\right)^{2(\alpha-\beta)} \le \widetilde{C}'''_{\alpha;\beta}$, и после замены соответствующие выражения оцениваются так же, как в (A).

Объединим оценки (а) и (б): $\Sigma_- = \Sigma_-^- + \Sigma_-^+ \le C'''\ln n$.

2) $1+2\alpha-\nu p<0$: снова, как в (1), $\Sigma_- = \sum\limits_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5}(\ldots) + \sum\limits_{j:\,-0.5<x_{j,n}<0}(\ldots) = \Sigma_-^- + \Sigma_-^+$.

а) Σ_-^-: согласно (F), $\sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{i,n} \le n^{-1-2\alpha+\nu p}$. Тогда

$\Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1} \sum\limits_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p n^{-1-2\alpha+\nu p} \sum\limits_i \left(1+n\left|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5p(2m-1)}$. Как и в случае (1), для достаточно больших m $n^{-1-2\alpha+\nu p} \sum\limits_i \left(1+n\left|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}\right|\right)^{-0.5p(2m-1)} \le$

$\le C_{\alpha;\beta;p;\nu} \sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n} \Rightarrow \Sigma_-^- \le Cn^{\nu p-1} \sum\limits_{j:\,-1<x_{j,n}\le-0.5} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\beta-\nu p}\tau_{j,n}$; далее – как в (1).

б) наконец, рассмотрим Σ_-^+. Начинаем оценивать, как Σ_+ в (A), и получаем: $\Sigma_-^+ \le C'n^{\nu p-1} \sum\limits_{j:\,-0.5<x_{j,n}<0} \left|\Delta\widetilde{L}_{n,j}\right|^p \sin^{1+2\alpha-\nu p}\tau_{j,n}$; далее – как S в (б) сл. (1).

Как видно из (A) и (Б), $D \le \overline{C}_{\alpha;\beta;p;\nu;m}\ln n$ для достаточно больших m: выбираем наименьшее такое m – оно зависит только от α, β, p, ν. Следовательно, установлено, что справедлива

Теорема 3 ($\cong$ [2, теорема 6]). $\forall f \in \hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$, $p \ge 1$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$, *степень которого* $\le 2mn$ *(*m *зависит только от* α, β, p, ν*), такой, что* $\left\| \dfrac{F_{\tilde{n}}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\nu}} \right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu} \ln^{\frac{1}{p}} n$.

Следствием теорем 2, 3 и аксиомы треугольника для нормы является

Теорема 4а. $\forall f \in \hat{H}^{(\nu)}_{p,\rho}$, $p \ge 1$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$, *степень которого* $\le 2mn$ *(*m *зависит только от* α, β, p, ν*), такой, что*

$$\left\| \frac{f(x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\nu}} \right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu} \ln^{\frac{1}{p}} n \Leftrightarrow \left\| \frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{\nu}} \right\|_{L^p_\rho} \le C_{\alpha;\beta;p;\nu} \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{\nu}}.$$

Выберем $\mu \in [0;\nu)$ и оценим $\left\| \dfrac{f(x)-F_{\tilde{n}}(f;x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\mu}} \right\|_{L^p_\rho}$, $\left\| \dfrac{F_{\tilde{n}}(f;x)-P_n(x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\mu}} \right\|_{L^p_\rho}$. Повторяя ход рассуждений из теоремы 2, $I = \int\limits_{-1}^{1} \left| \dfrac{f(x)-F_{\tilde{n}}(f;x)}{\left(n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}\right)^{\mu}} \right|^p \rho(x)dx \le C'_{\alpha;\beta;p;\nu;\mu} n^{(\mu-\nu)p}$, а в теореме 3, поскольку $1+2\alpha-\mu p > 1+2\alpha-\nu p$, $D \le C''_{\alpha;\beta;p;\nu;\mu} n^{(\mu-\nu)p}$, и справедлива

Теорема 4b. $\forall f\in\hat{H}^{(v)}_{p,\rho}, p\ge 1, \mu\in[0;v)$ *существует алгебраический полином* $P_n(x)$ *степени* $\le 2mn$, *такой, что* $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{\mu}}\right\|_{L^p_\rho}\le\frac{C_{\alpha;\beta;p;v;\mu}}{n^{v}}$.

Пусть $\gamma_m=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{2r+4}\left(m\sin\frac{t}{2}\right)^{-2r-4}dt$, $r\in N, m\in N$. Известно, что $K(t)=\gamma_m^{-1}\left(\sin\frac{mt}{2}\right)^{2r+4}\left(m\sin\frac{t}{2}\right)^{-2r-4}$ – чётный тригонометрический полином порядка $(r+2)(m-1)$, удовлетворяющий условиям: $\int\limits_{[-\pi;\pi]}K(t)dt=1$, $\int\limits_{[-\pi;\pi]}|t|^{\beta}K(t)dt\le Cm^{-\beta}, 0<\beta<2r+3$; если $f(x)\in L[-1;1]$, то $Q^*(\cos\theta)=\int\limits_{[-\pi;\pi]}f(\cos(\theta+t))K(t)dt$ – алгебраический полином, $\deg Q^*=(r+2)(m-1)$.

Лемма 5 ($\cong$ [3, лемма 1]). Если функция $f(x)$ обладает производной $f'(x)$ такой, что $\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s}}\right|^{p}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le M<\infty$, $p\ge 1+2\alpha\ge 0$ и $p\ge 1+2\beta\ge 0$, то $\exists$ полином $Q(x)$ степени не выше n, для которого $I=\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^{p}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{CM}{n}$, где C не зависит от n, $n\ge[s]+2$.

Доказательство. Пусть $m\in N$ – наибольшее число, для которого $(r+2)(m-1)\le n$, $r=[s]$ (тогда $(r+2)m\ge n$). В качестве $Q(x)$ возьмём $Q^*(\cos\theta)$; сделаем замену $x=\cos\theta$: $I=\left(2^{\alpha+\beta}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{f(\cos\theta)-Q^*(\cos\theta)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{2\beta}\sin\theta\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=$

$$=C'_{\alpha;\beta;p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t)\frac{f(\cos\theta)-f(\cos(\theta+t))}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}dt\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

По обобщённому неравенству Минковского

$$I\le C'_{\alpha;\beta;p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t)\underbrace{\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(\cos\theta)-f(\cos(\theta+t))}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}}_{I_1}dt.$$

Для $t\ge 0$

$$I_1=\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{0}^{t}\frac{f'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}du\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Опять применим это неравенство: $I_1\le\int\limits_{0}^{t}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^{p}\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}du=$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))}{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^s}\right|^p\cdot\underbrace{\frac{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{sp}|\sin(\theta+u)|^p\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{(s+1)p}}}_{A}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}du.$$

Покажем, что $A\le C_1(1+mu)^{(s+1)p}\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\beta}$.

Так как $n\le m(r+2)$, $\frac{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^{sp}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^{sp}}\le\left(1+\frac{n|\sin u|}{1+n|\sin\theta|}\right)^{sp}\le(1+nu)^{sp}$, $|\sin(\theta+u)|^p=$ $=2^p\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\alpha)}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\beta)}\cdot\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{(1+2\alpha)}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{(1+2\beta)}$, то достаточно показать, что $B=\frac{\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\alpha)}\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{p-(1+2\beta)}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\alpha}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^{1+2\beta}}{\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)^p}\le C''(1+nu)^p$. Используя неравенство $\left(|\sin\theta|+n^{-1}\right)\ge\frac{1}{3}\left(\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right)\left(\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right)$, получим ($0\le 1+2\alpha\le p$, $0\le 1+2\beta\le p$): $B\le C'\left(\frac{|\sin(0.5(\theta+u))|+n^{-1}}{|\sin(0.5\theta)|+n^{-1}}\right)^{p-(1+2\alpha)}\cdot\left(\frac{|\cos(0.5(\theta+u))|+n^{-1}}{|\cos(0.5\theta)|+n^{-1}}\right)^{p-(1+2\beta)}\le$ $\le C'\left(\left(1+\frac{nu}{1+n\sin^2(0.5\theta)}\right)\cdot\left(1+\frac{nu}{1+n\cos^2(0.5\theta)}\right)\right)^p\le C'(2+\pi)^p(1+nu)^p$, откуда $B\le C''(1+nu)^p$.

Значит, $I_1\le\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi+u}^{\pi+u}\left|\frac{f'(\cos(\theta+u))}{\left(|\sin(\theta+u)|+n^{-1}\right)^s}\right|^p\cdot\left|\sin\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\alpha}\cdot\left|\cos\frac{\theta+u}{2}\right|^{1+2\beta}d(\theta+u)\right)^{\frac{1}{p}}\times$ $\times C_2(1+mu)^{s+1}du\le\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi}(\ldots)d(\theta+u)\right)^{1/p}\cdot C_2(1+mu)^{s+1}du\le C_3\int_0^t M(1+mu)^{s+1}du\le$ $\le C_3Mt(1+mt)^{s+1}$; $t\le 0$ – аналогично. Значит, $I\le C_4M\int_{[-\pi;\pi]}|t|(1+m|t|)^{s+1}K(t)dt\le$ $\le C_5M\int_{[-\pi;\pi]}\left(|t|K(t)+m^{s+1}|t|^{s+2}K(t)\right)dt\le C_5M\left(\frac{C_1'}{m}+m^{s+1}\frac{C_2'}{m^{s+2}}\right)\le\frac{\overline{C}_5M}{m}\le\frac{\overline{C}M}{n}$.

Лемма 6 ($\cong$ [3, лемма 2]). Если $f(x)$ дифференцируема и $\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)-P_{n-1}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^s}\right|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}\le M<\infty$, где $P_{n-1}(x)$ – полином степени $\le(n-1)$, $p\ge 1+2\alpha\ge 0$ и $p\ge 1+2\beta\ge 0$, то для $n\ge[s]+2$ существует полином $Q_n(x)$ степени не выше n, такой, что $\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-Q_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}\le\frac{CM}{n}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=f(x)-\int_{[0;x]}P_{n-1}(u)du$, тогда $\varphi'(x)=f'(x)-P_{n-1}(x)\Rightarrow\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, согласно которой $\exists Q_n^*(x)$: $\left\|\frac{\varphi(x)-Q_n^*(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right\|_{L_\rho^p}=\left\|\frac{f(x)-Q_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{s+1}}\right\|_{L_\rho^p}\le\frac{CM}{n}$, где степень полинома

$Q_n(x):=Q_n^*(x)+\int\limits_{[0;x]}P_{n-1}(u)du$ не превосходит n; он и является искомым.

Теорема 5. *Пусть: 1)* $\alpha,\beta>-1$; $p\ge 1$; $r\in Z_+$; $0<\nu\le 1$; *2)* $f(x)\in\hat{H}_{p,\rho}^{(r+\nu)}$; *3) если* $r>0$, *то* $p\ge 1+2\alpha\ge 0$ *и* $p\ge 1+2\beta\ge 0$. *Тогда:*

а) $\exists C_{\alpha;\beta;p;r;\nu}$: $\forall n\ge r$ $\exists P_n(x)$ *– полином степени* $\le n$, *для которого*

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r+\nu}}\right\|_{L_\rho^p}\le C_{\alpha;\beta;p;r;\nu}\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{r+\nu}}.$$

б) Если $0\le\mu<\nu$, *то* $\exists C_{\alpha;\beta;p;r;\nu;\mu}$: $\forall n\ge r$ $\exists P_n(x)$ *– полином степени* $\le n$, *для которого* $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r+\mu}}\right\|_{L_\rho^p}\le C_{\alpha;\beta;p;r;\nu;\mu}n^{-r-\nu}$.

Доказательство. *(а)*: $f\in\hat{H}_{p,\rho}^{(r+\nu)}\Rightarrow f^{(r)}\in\hat{H}_{p,\rho}^{(\nu)}$. Пусть $K\in N$ таково, что $2mK\le n-r\le 2m(K+1)$. По теореме 4а $\exists$ полином $P_{K'}(x)$ степени $\le 2mK$: $\left\|\frac{f^{(r)}(x)-P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+K^{-1}\right)^{\nu}}\right\|\le C\frac{\ln^{\frac{1}{p}}K}{K^{\nu}}$. Поскольку $\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{-\nu}\le(4m+2r)^{\nu}\left(\sqrt{1-x^2}+K^{-1}\right)^{-\nu}$,

$\left\|\frac{f^{(r)}(x)-P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{\nu}}\right\|_{L_\rho^p}\le C'_{\alpha;\beta;p;r;\nu}\left\|\frac{f^{(r)}(x)-P_{K'}(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+K^{-1}\right)^{\nu}}\right\|_{L_\rho^p}\le C''_{\alpha;\beta;p;r;\nu}\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{\nu}}\left(\frac{n}{K}\right)^{\nu}\le C'''_{\alpha;\beta;p;r;\nu}\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{\nu}}$. Если $r>0$, применим r раз лемму 6: $\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+n^{-1}\right)^{r+\nu}}\right\|_{L_\rho^p}\le\tilde{C}_{\alpha;\beta;p;r;\nu}\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{r+\nu}}$, и $\deg P_n(x)\le n$.

Чтобы доказать *(б)*, рассуждаем аналогично, но вместо $\left(\sqrt{1-x^2}+N^{-1}\right)^{-\nu}$ берём $\left(\sqrt{1-x^2}+N^{-1}\right)^{-\mu}$, а вместо теоремы 4а – теорему 4b.

Библиографические ссылки

1. **Брудный Ю.А.** Приближение функций алгебраическими многочленами. / Ю.А. Брудный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – 32, №4 – С. 780-787.
2. **Моторный В.П.** Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p. / В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1971. – 35, №4 – С. 872-897.
3. **Потапов М.К.** О теоремах типа Джексона в метрике L_p. / М.К. Потапов // Докл. АН СССР – 1956. – 111, №6 – С. 1185-1188.
4. **Ульянов П.Л.** О рядах по системе Хаара. / П.Л. Ульянов // Матем. сб. – 1964 – 63, №3 – С. 356-391.
5. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^{ω}. / П.Л. Ульянов // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – 32, №3 – С. 649-686.

Надійшла до редколегії 24.04.09