УДК 517.5

Е.А. Севостьянов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

О СВЯЗИ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО ИСКАЖЕНИЯ С ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИН В R^n

Досліджено відображення зі скінченим спотворенням R^n, $n \geq 2$. Доведено, що довільне відкрите дискретне відображення зі скінченим спотворенням за Іванцом, міра иножини точок розгалуження якої дорівнює нулю, є відображення зі скінченим спотворенням довжини за умовою, що відповідна зовнішня ділатація $K_O(x,f) \leq K(x)$ майже скрізь, якщо $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$.

Введение. Основной целью статьи является получение взаимосвязи между отображениями класса Соболева и отображениями конечного искажения длины. Такая взаимосвязь, по сути, была указана в [10], однако, доказательства приведено не было. Несколько позднее оно было получено в [2], однако, методология, посредством которой было проведено доказательство, весьма сложная, к тому же, судя по всему, многие результаты доказаны здесь с перегруженными априорными условиями, см. теорему 2.1, теорему 4.1 и следствие 4.1 там же. Доказательство, которое приведено ниже (теорема 1) базируется на методе известного математика Е.А. Полецкого, которое, по нашему мнению, вполне можно считать более простым и, в известном смысле, вполне отвечающим понятиям о математической строгости. Пусть D – область в R^n, $n \geq 2$. Отображение $f: D \to R^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in R^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в R^n. Всюду далее $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in R^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$, $m(x)$ – мера Лебега в R^n, запись $f: D \to R^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. Мы также предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию, т. е., топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \subset D$, такой что $\overline{G} \subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Через B_f, $B_f \subset D$, будет обозначаться *множество точек ветвления отображения* $f: D \to R^n$, т. е. $x_0 \in B_f$ тогда и только тогда, когда f не является локальным гомеоморфизмом ни в какой окрестности $U = B(x_0, \varepsilon)$ точки x_0. Для множества $A \subset R^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега A в R^n, $\mathrm{mes}_1(A)$ означает лебегову меру (длину) множества $A \subset R$. Область $G \subset D$, такая что $\overline{G} \subset D$, называется *нормальной областью отображения* f, если $\partial f G = f \partial G$. Окрестность U точки $x_0 \in D$ называется *нормальной* *окрестностью отображения* f, если $x_0 \in U$ и U является нормальной областью f. Пусть $f: D \to R^n$ – открытое дискретное отображение, тогда каждая точка $x_0 \in D$ имеет нормальную окрестность U в D, см., напр., лемму 2.9 в [9]. Пусть $f: D \to R^n$ – произвольное отображение и пусть существует область $G \subset D$ с $\overline{G} \subset D$, такая что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом,* не зависит от области G и обозначается символом $i(x, f)$.

Пусть V – нормальная область в D, $y \in f(V)$, $\{x_k\} = f^{-1}(y) \cap V$, тогда функция $\mu(y, f, V) = \mu(f, V) = \sum\limits_k i(x_k, f)$ постоянна в $f(V)$ для произвольного открытого дискретного отображения $f: D \to R^n$, см. 2.1 и 2.4 в [9].

Напомним, что борелева функция $\rho: R^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в R^n, если $\int\limits_\gamma \rho(x) \quad |dx| \quad \geq \quad 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$.

В этом случае мы пишем $\rho \in adm\, \Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) \quad = \quad \inf_{\rho \in adm\, \Gamma} \quad \int\limits_{R^n} \quad \rho^n(x) \quad dm(x).$$

Пусть $Q: D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f: D \to \overline{R^n}$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\,\Gamma) \quad \leq \quad \int\limits_D \quad Q(x) \cdot \rho^n(x) \quad dm(x) \qquad (1)$$

для любого семейства Γ кривых γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\, \Gamma$ [11].

Отметим, что оценки типа (1) в случае $Q(x) \equiv 1$ характеризуют конформные отображения, а при $Q(x) \leq q$–квазиконформные, см., напр., 8.1, 13.1 и 34.3 в [15]. В случае, когда непостоянное отображение f не является гомеоморфизмом, оценки вида (1) при ограниченной функции Q фактически являются частью определения квазирегулярных отображений (отображений с ограниченным искажением по терминологии Решетняка), см. [9; 14]. Для отображения $f: D \to R^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п. в.), пусть $f'(x)$ обозначает матрицу Якоби отображения f в точке x, $J(x, f)$ означает якобиан f в точке x, то есть $\det f'(x)$. Всюду далее

$$\| f'(x) \| = \max_{h\in R^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \qquad l(f'(x)) = \min_{h\in R^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x определяется как

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n} ,$$

если $J(x,f)\neq 0$, 1, если $f'(x)=0$, и ∞ в других случаях. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется как отношение

$$K_0(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|} ,$$

если $J(x,f)\neq 0$, 1, если $f'(x)=0$ и ∞ в остальных случаях. Напомним, что отображение $f: X\to X'$ между пространствами с мерой (X,Σ,μ) и (X',Σ',μ') имеет (N)*-свойство Лузина*, если $\mu'(f(S))=0$ как только $\mu(S)=0$. Аналогично, f имеет (N^{-1}) *–свойство*, если $\mu(S)=0$ как только $\mu'(f(S))=0$. Пусть $x\in E\subset R^n$, $\varphi: E\to R^n$. Положим

$$L(x,\varphi) = \limsup_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}, \qquad l(x,\varphi) = \liminf_{y\to x,\, y\in E} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}.$$

Отображение $f: D\to R^n$, $n\geq 2$, называется отображением с *конечным метрическим искажением,* пишем $f\in FMD$, если оно имеет (N) – свойство Лузина и $0 < l(x,f) < L(x,f) < \infty$ для п. в. $x\in D$. Пусть $\Delta\subseteq R$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma:\Delta\to R^n$ – локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma:\Delta\to\Delta_\gamma\subseteq R^n$ с условием $l_\gamma(t_0)=0$, $t_0\in\Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t>t_0$ и $-l(\gamma|_{[t_0,t]})$, если $t<t_0$, $t\in\Delta$. Пусть $g:|\gamma|\to R^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma|=\gamma(\Delta)\subseteq R^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma}=g\circ\gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная не убывающая функция $L_{\gamma,g}:\Delta_\gamma\to\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,g}(l_\gamma(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}(t) \quad \forall\ t\in\Delta$.

Напомним, что кривая γ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma}\in R^n$ *при отображении* $f: D\to R^n$, если $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$. Будем говорить, что отображение $f: D\to R^n$ имеет $L-$*свойство*, если выполнены следующие условия:

(L_1) для п. в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляемая и функция $L_{\gamma, f}$ имеет (N)-свойство;

(L_2) для п. в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ имеет (N^{-1})-свойство.

По замечанию 4.1 в [10] из (L) – свойства следует *ACP –свойство*, т. е. абсолютная непрерывность функции $L_{\gamma, f}$ на всех замкнутых интервалах Δ_γ для п. в. кривых γ в D. Будем говорить, что отображение $f: D \to R^n$ имеет *ACP^{-1}–свойство*, если функция $L_{\gamma, f}^{-1}$ абсолютно непрерывна на замкнутых подинтервалах $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ для п. в. кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и для каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma}$.

Известно, что отображение $f: D \to R^n$ имеет (L) – свойство тогда и только тогда, когда $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, см. предложение 4.3 в [10].

Отображение $f: D \to R^n$, $n \geq 2$, называется отображением *с конечным искажением длины*, пишем $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и f имеет (L) – свойство.

Класс отображений конечного искажения длины введён О. Мартио, В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в 2002 г. Согласно [10], произвольный гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$ с $f^{-1} \in W_{loc}^{1,n}$ имеет конечное искажение длины. Произвольное непостоянное квазирегулярное отображение также принадлежит классу FLD. Отметим, что отображения класса FLD являются Q–отображениями с $Q(x) = K_I(x, f)$, см. теорему 6.10 в [10].

Пусть E – множество в R^n и пусть $\gamma: \Delta \to R^n$ – некоторая кривая. Обозначим через $\gamma \cap E = \gamma(\Delta) \cap E$. Пусть γ – локально спрямляема. Тогда

$$l(\gamma \cap E) = \operatorname{mes}_1 E_\gamma,$$

где

$$E_\gamma = l_\gamma(\gamma^{-1}(E)).$$

Пусть $I = [a, b]$. Для заданной кривой $\gamma: I \to R^n$ определим функцию длины $S(t)$ по правилу $S(t) = S(\gamma, \gamma[a, t])$, где $S(\gamma, I)$ означает длину кривой $\gamma|_I$. Пусть $B \subset I$, тогда $S(\gamma(B))$ означает меру множества значений функции $S(t)$ на множестве B.

Отображение $f: D \to R^n$ называется *отображением конечного искажения по Иванцу*, если $f \in W_{loc}^{1,n}$ и существует функция $K(x): D \to [1, \infty)$ такая, что $\| f'(x) \|^n \leq K(x) \cdot J(x, f)$ при п. в. $x \in D$, см. [3], [4]. Последнее соотношение, очевидно, эквивалентно условию $K_O(x, f) \leq K(x)$ п. в.

Пусть $V \subset D$ – нормальная область и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_V : V^* \to R^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$, тогда

$$g_V(y) = \frac{1}{m} \sum_i i\,(x_i, f)\, x_i,$$

где $m = \sum_i i(x_i, f) = \mu(f, V)$.

Основной результат и следствия из него.

Теорема 1. *Пусть $f : D \to R^n$ – открытое дискретное отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x) \in L^{n-1}_{loc}(D)$ и $|B_f| = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.*

Доказательство. В основе метода доказательства лежит подход из [12], см. лемму 6. Поскольку отображение $f \in W^{1,n}_{loc}$ открыто в D, f дифференцируемо почти всюду в D, см. теорему 4 в [13, с331] и обладает (N)-свойством, [6], кроме того, f обладает (N^{-1}) - свойством, см. теорему 1.2 в [5]. По следствию 3.14 в [10], $f \in FMD$. Т. к. $f \in W^{1,n}_{loc}$, $f \in ACP$, см. п. 28.2 в [15]. Таким образом, согласно предложению 4.3 в [10], достаточно доказать, что $f \in ACP^{-1}$.

Перед тем, как непосредственно переходить к доказательству, сделаем несколько полезных замечаний. Пусть Γ – семейство кривых в D и $\Gamma_* = f(\Gamma)$. Не ограничивая общности, можно считать, что все кривые γ_* семейства Γ_* спрямляемы. Пусть s_* – натуральный параметр на γ_* и $\gamma_* = f(\gamma(t))$. Т. к. функция $s_*(t)$ строго монотонна и непрерывна, существует обратная функция $t(s_*)$, которая также строго монотонна и непрерывна. Таким образом, можно рассмотреть параметр s_* на γ. В дальнейшем, мы предполагаем, что все кривые семейств Γ и Γ_* параметризованы таким образом.

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 1, $\widetilde{\Gamma}$ – семейство кривых в D, $\widetilde{\Gamma}_* = f(\widetilde{\Gamma})$. Покажем, что $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$, таких что $\gamma_* = f \circ \gamma$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\widetilde{\Gamma} \subset U'$, где U' – компактная подобласть области D.

Пусть $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ и I – отрезок, который является областью определения параметра s_*. Покажем, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая $\gamma(s_*)$ спрямляема на $I \setminus \gamma(B_f)$, где $\gamma(B_f) = \{ s_* : \gamma(s_*) \in B_f \}$.

Покроем множество $U' \setminus B_f$ счётной системой окрестностей $\{U_l\}$, в каждой из которых отображение $f_l = f|_{U_l}$ гомеоморфно. Пусть $h_l = f_l^{-1}$. Поскольку $K(x) \in L_{loc}^{n-1}(D)$, $h_l = (h_{l1}, \ldots, h_{ln}) \in W_{loc}^{1,n}$, см. [1], и, следовательно, $h_l \in ACP$, см. п. 28.2 в [15]. Заметим, что если $\gamma(s_*) \in U_l \cap U_j$, то $h_l(\gamma_*(s_*)) = h_j(\gamma_*(s_*))$. Поскольку кривая γ параметризована натуральным параметром s_* кривой γ_*, сделанное замечание позволяет определить отображение $g : \gamma_*|_{I\setminus\gamma(B_f)} \to R^n$ такое, что если $\gamma(s_*) \in U_k$, то $g(\gamma_*(s_*)) = h_k(\gamma_*(s_*))$. По теореме 4 в [13 с. 331], каждый гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,n}$ дифференцируем п. в. и, следовательно, h_l дифференцируемо п. в. в $f_l(D)$. Пусть B^* – множество, где полный дифференциал h_l не существует хотя бы для одного l. Тогда множество B^* борелево и $|B^*| = 0$. По теореме 33.1 в [15] $l(\gamma_* \cap B^*) = 0$ для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$. Следовательно, $\gamma'(s_*)$ существует для п.в. s_* и для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Положим

$$\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) = \frac{\partial h_{kl}}{\partial y_j}(\gamma_*(s_*)).$$

Имеем

$$S(\gamma, I \setminus B_f) = \int_{I\setminus\gamma(B_f)} |\gamma'(s_*)|\, ds_* = \int_{I\setminus\gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(s_*) \right)^2 \right)^{1/2} ds_*$$

для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Заметим, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ $\int_{I\setminus\gamma(B_f)} \left(\sum_{l,j} \left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j} \right)^2 \right)^{1/2} ds_* < \infty$, поскольку $h_l \in W_{loc}^{1,n}$ и $|U'| < \infty$. Следовательно, для п. в кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая γ спрямляема на $I \setminus \gamma(B_f)$. Более того, $S(\gamma, C) = 0$ для любого множества $C \subset I \setminus \gamma(B_f)$, такого что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$. Действительно,

$$S(\gamma, C) = \int_C |\gamma'(s_*)|\, ds_* = 0$$

для п. в. кривых $\gamma_* = f \circ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Пусть B_l – множество точек ветвления x таких что $i(x, f) = l$ и $\gamma(B_l) = \{ s_* : \gamma(s_*) \in B_l \}$. Покажем, что для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ кривая $\gamma(s_*)$ спрямляема на $I \setminus \bigcup_{k>l} \gamma(B_k)$, $l \geq 1$, и $S(\gamma, C) = 0$ для любого множества $C \subset I \setminus \bigcup_{k>l} \gamma(B_k)$, такого что $\mathrm{mes}_1(C) = 0$.

Доказательство проведём индукцией по l. При $l=1$ утверждение доказано. Предположим, что оно остаётся справедливым для $l=j-1$. Покажем его справедливость для $l=j$. Поскольку по предположению $|B_f|=0$, по (N) - свойству также $|f(B_f)|=0$. По теореме 33.1 в [15] $\operatorname{mes}_1(\gamma(B_f))= l(\gamma_* \cap f(B_f))=0$ для п. в. кривых $\gamma_* \in \widetilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_* = f\circ\gamma$. Следовательно, не ограничивая общности можно считать, что $\operatorname{mes}_1(\gamma(B_f))=0$. Покроем B_j счётной системой нормальных областей $\{U_l\}$ таких, что $\mu(f,U_l)=j$, $\mu(f,U_l)=\sum\limits_{x_l\in U_l} i(x_l,f)$. Отображение $g_l=g_{f(U_l)}$ абсолютно непрерывно на п. в. кривых из $U_l^*=f(U_l)$, см. теорему 2.1 в [2]. Пусть $\gamma_*(s_*)\in f(B_j\cap U_l)$, тогда имеем $g_l(\gamma_*(s_*))=\gamma(s_*)$. Таким образом, $g_l^{-1}\gamma_*$ состоит из не более, чем счётного числа кривых в U_l, каждая из которых в точках B_f совпадает с γ, см. лемму 4 в [12]. Тогда, поскольку $g_l\in ACP$ в U_l^*, по лемме 1 в [12], $S(\gamma,\gamma(B_j\cap U_l))=0$ для п.в. кривых $\gamma_*\in\widetilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_*=f\circ\gamma$. Тогда $S(\gamma,\gamma(B_j))=0$ для п.в. кривых $\gamma_*\in\widetilde{\Gamma}_*$ и всех кривых γ таких, что $\gamma_*=f\circ\gamma$. Полагая в лемме 2 в [12] $B:=\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $E:=\gamma(B_j)$ и используя предположение индукции, получаем что кривая γ спрямляема на $I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$ и $S(\gamma,C)=0$ для любого множества $C\subset I\setminus\bigcup\limits_{k>j}\gamma(B_k)$, такого что $\operatorname{mes}_1(C)=0$. Поскольку $\overline{U'}\subset D$, найдётся $M\in\mathrm{N}$, такое что $i(x,f)\le M$. Тогда по доказанному $S\left(\gamma,\bigcup\limits_{j=2}^{M}\gamma(B_j)\right)=0$ для п. в. кривых $\gamma_*\in\widetilde{\Gamma}_*$. По лемме 3 в [12] мы получаем, что кривая $\gamma(s_*)$ абсолютно непрерывна и спрямляема для п. в. кривых $\gamma_*\in\widetilde{\Gamma}_*$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f:D\to R^n$ – отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x)\in L^p_{loc}(D)$ с $p>n-1$ и $|B_f|=0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины.

Доказательство напрямую следует из того, что при указанных условиях на $K(x)$ отображение f открыто и дискретно, [7; 8], и теоремы 1.

Следствие 2. Пусть $f: D \to R^n$ – открытое дискретное отображение конечного искажения по Иванцу, для которого $K(x) \in L^{n-1}_{loc}(D)$ и $|B_f| = 0$. Тогда f является Q–отображением с $Q(x) = K_I(x, f)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.10 в [10] и теоремы 1.

Библиографические ссылки

1. **Heinonen J. and Koskela P.** Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Rational Mech. Anal. – 1993. – P. 81–97.

2. **Koskela P. and Onninen J.** Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math. – 2006. – 599. – P. 1–26.

3. **Iwaniec T. and Martin G.** Geometric Function Theory and Non–linear Analysis. – Clarendon Press: Oxford, 2001.

4. **Iwaniec T. and Sverak V.** On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – 118. – P. 181–188.

5. **Koskela P., Maly J.**, Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. –5, № 2 . – P. 95–105.

6. **Maly J. and Martio O.** Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$ // J. Reine Angew. Math. – 1995. – 458. – P. 19–36.

7. **Manfredi J.J. and Villamor E.** Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – 32, № 2. – P. 235–240.

8. **Manfredi J.J. and Villamor E.** An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – 47, № 3. – P. 1131–1145.

9. **Martio O., Rickman S. and Väisälä J.** Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. –448. – P. 1–40.

10. **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.** Mappings with finite length distortion // J. D. Anal. Math. – 2004. – 93. – P. 215–236.

11. **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.** On Q–homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. – 2005. – 30, № 1. – P. 49–69.

12. **Полецкий Е.А.**, Метод модулей для негомеоморфных квазиконфомных отображений /Е.А. Полецкий// Матем. сб. – 1970. – 83, № 2. – С. 261–272.

13. **Решетняк Ю.Г.** Обобщённые производные и дифференцируемость почти всюду / Ю.Г. Решетняк // Матем. сб. – 1968. – 75. – С. 323 – 334.

14. **Решетняк Ю.Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю.Г. Решетняк – Новосибирск, 1982, 574 с.

15. **Väisälä J.** Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

Надійшла до редколегії 07.11.08