УДК 517.5

В.Ф. Бабенко [*,**], М.С. Чурілова [*]

[*] *Дніпропетровський національний університет*

[**] *Інститут прикладної математики і механіки НАН України*

ПРО НЕРІВНОСТІ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

Одержано нові нерівності, які узагальнюють відомий результат Гейсберга, одержаний для дробових похідних у формі Маршо, на випадок більш високих порядків похідних, причому дробова похідна береться за Ріссом. Нерівність зі старшою другою похідною є точною.

Нерівності типу Колмогорова для норм проміжних похідних, особливо з непокращуваними константами, знаходять важливі застосування в багатьох галузях математики, і для цілих порядків похідних у цьому напрямку одержано чимало результатів [1]. Для дробових похідних таких нерівностей відомо значно менше. Деякі результати для похідних дробового порядку містяться в [2–5; 8–10; 12].

У даній статті для функцій, заданих на дійсній осі, для похідних за Ріссом установлюється аналог результата Гейсберга [4], одержаного для дробових похідних у формі Маршо. При цьому порівняно з результатом Гейсберга збільшуються порядки як старших (цілих) похідних, так і проміжної (дробової).

Наведемо спочатку основні використовувані означення.

Через $C = C(R)$ будемо позначати простір усіх неперервних та обмежених на R функцій $f : R \to R$ з нормою

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(R)} := \sup_{x\in R}|f(x)|.$$

Через $L_p(R)$, $1 \le p \le \infty$, будемо позначати простір вимірюваних функцій $f : R \to R$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(R)} := \begin{cases} \left(\int\limits_R |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in R}|f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in N$ та $s \in [1,\infty]$ позначимо через $L_s^r(R)$ множину функцій $f : R \to R$ таких, що $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно неперервна та $f^{(r)} \in L_s(R)$ і покладемо $L_{p,s}^r(R) := L_p(R) \cap L_s^r(R)$.

Означення 1 [7, с. 95-97]. *Дробова похідна у формі Маршо порядку* $\alpha \in (0,1)$ *функції* $f : R \to R$ *визначається формулою*

$$(D_{\pm}^{\alpha}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt$$

(коли ці інтеграли існують), де $\Gamma(x)$ *– гама-функція Ейлера.*

Для заданого $\lambda>0$ та $r\in N$ через $\varphi_{\lambda,r}$ будемо позначати r-й $\frac{2\pi}{\lambda}$-періодичний інтеграл від функції $\varphi_{\lambda,0}(t):=\operatorname{sgn}\sin\lambda t$ з нульовим середнім значенням на періоді; $\varphi_r:=\varphi_{1,r}$. Функції $\varphi_{\lambda,r}$ називають *ідеальними сплайнами Ейлера.*

Ми також будемо використовувати такі функції: $\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}$, яка дорівнює $\varphi_{\lambda,r}\left(x+(r-1)\frac{\pi}{2\lambda}\right)$, якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{\lambda},\frac{\pi}{\lambda}\right]$, і $\max_t\varphi_{\lambda,r}(t)$, якщо $x\notin\left[-\frac{\pi}{\lambda},\frac{\pi}{\lambda}\right]$; $\widetilde{\varphi}_r:=\widetilde{\varphi}_{1,r}$ та функцію $\overline{\varphi}_2$, яка дорівнює: $\varphi_2(x)$, якщо $x\in[-\pi/2,\pi/2]$; $\max_t\varphi_2(t)$, якщо $x\in(\pi/2,\infty)$; $\min_t\varphi_2(t)$, якщо $x\in(-\infty,-\pi/2)$.

Результат Гейсберга [4] можна подати в такому вигляді.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha\in(0,1)$. *Для всіх функцій* $f\in L^2_{\infty,\infty}(R)$ *справедливі точні нерівності*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}f\right\|_{\infty}\le\frac{\left\|D_{\pm}^{\alpha}\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}}{\left\|\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}}\left\|f\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}\left\|f''\right\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

У даній статті одержано аналог теореми 1 для дробових похідних за Ріссом порядку $\alpha\in(0,2)$ [7]; при цьому порядок старшої похідної може дорівнювати $r=2,3,\ldots$, та для $r=2$ знаходиться найкраща константа.

Означення 2. *Дробова похідна за Ріссом порядку* $\alpha\in(0,2)$ *функції* $f:R\to R$ *визначається формулою*

$$(D^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_0^{\infty}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^{1+\alpha}}dh$$

(коли цей інтеграл існує); причому при $\alpha=1$ *нормуючий множник вважається рівним своєму граничному значенню при* $\alpha\to1$, *тобто рівним* $(-2/\pi)$.

Важливу роль у наших міркуваннях відіграватиме теорема порівняння Колмогорова для похідних. Наведемо її формулювання як воно дається в [6, с. 122]. Нехай

$$W_{\infty}^{r}(R)=\left\{f\in L_{\infty,\infty}^{r}(R):\left\|f^{(r)}\right\|_{\infty}\le1\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай* $f\in W_{\infty}^{r}(R)$ *(*$r=1,2,\ldots$*) та* $\|f\|_{\infty}=\|\varphi_{\lambda,r}\|_{\infty}$ *для деякого* λ. *Тоді:*

1) якщо $f(x)=\varphi_{\lambda,r}(y)$, *то* $|f'(x)|\le|\varphi'_{\lambda,r}(y)|$ *(для* $r=1$ *у припущенні, що* $f'(x)$ *існує);*

2) справедливі непокращувані (в умовах теореми) нерівності

$$\|f^{(k)}\|_\infty\le\|\varphi^{(k)}_{\lambda,r}\|_\infty=\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty,\quad k=1,2,\dots,r-1.$$

Наведемо основний результат даної статті.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha\in(0,2)$ *і* $r=2,3,\dots$ *Тоді для всіх функцій* $f\in L^r_{\infty,\infty}(R)$ *справедлива нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty\le\frac{\|D^\alpha\widetilde{\varphi}_r\|_\infty}{\|\widetilde{\varphi}_r\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}}\|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}\|f^{(r)}\|_\infty^{\frac{\alpha}{r}}. \tag{2}$$

Для $r=2$ *константа* $\|D^\alpha\widetilde{\varphi}_r\|_\infty/\|\widetilde{\varphi}_r\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}$ *у (2) є непокращуваною та (2) перетворюється на рівність для функції* $\widetilde{\varphi}_r$.

Зауваження. Для $\alpha\in(0,1)$ твердження теореми встановлено авторами в [10]. У даній роботі ми покажемо, що міркування з [10] практично без змін переносяться на випадок $\alpha\in(0,2)$.

Доведення. Візьмемо спочатку функцію f таку, що $\|f^{(r)}\|_\infty=1$ та виберемо $\lambda>0$ так, щоб $\|f\|_\infty=\|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\|_\infty$. Будемо оцінювати $|(D^\alpha f)(0)|$.

Зауважимо, що ми можемо вважати функцію f парною, оскільки для парної функції $f^*(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, як випливає з означення похідної, $(D^\alpha f^*)(0)=(D^\alpha f)(0)$, та, згідно з властивостями норми, $\|f^*\|_\infty\le\|f\|_\infty$ і $\|f^{*(r)}\|_\infty\le\|f^{(r)}\|_\infty$; отже, якщо нерівність справедлива для f^*, вона також справедлива і для f.

Для доведення нерівності (2) доведемо оцінку

$$|(D^\alpha f)(0)|\le|(D^\alpha\widetilde{\varphi}_{\lambda,r})(0)|. \tag{3}$$

Для цього, враховуючи парність f, покажемо, що для всіх $h>0$

$$|f(h)-f(0)|\le|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h)-\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0)|.$$

Розглянемо 3 випадки.

1) Нехай спочатку $0 < h < \frac{\pi}{2\lambda}$. Нехай $g(x) = x + h$, якщо $x \in (-h, 0]$; $g(x) = -x + h$, якщо $x \in (0, h)$, і $g(x) = 0$, якщо $x \notin (-h, h)$. Неважко перевірити, що

$$f(h) - f(0) = \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} f''(x) g(x) dx .$$

Через $r(f, x)$ будемо позначати спадне переставлення звуження функції $|f|$ на проміжок $[-h, h]$ (означення і властивості спадного переставлення [6, с. 111-113].

Спочатку доведемо одну допоміжну нерівність для переставлень. Точніше, покажемо, що для всіх $x \in (0, 2h)$

$$\int_{0}^{x} \left[r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x\right) - r\left(f'', x\right) \right] dx \geq 0 . \tag{4}$$

Варто зазначити, що $r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, 0\right) \geq r(f'', 0)$ (це випливає з означення переставлення та з того факту, що оскільки $\|f\|_{\infty} = \left\|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\right\|_{\infty}$, то за теоремою 2 $\|f''\|_{\infty} \leq \left\|\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}\right\|_{\infty}$). Далі, покажемо, що різниця $\psi(x) = r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x\right) - r(f'', x)$ змінює знак на інтервалі $[0, 2h]$ не більше одного разу. Дійсно, припустимо, що ψ змінює знак більше одного разу. Тоді існують три точки $y_1 < y_2 < y_3$ такі, що $\psi(y_1) > 0$, $\psi(y_2) < 0$ та $\psi(y_3) > 0$. Позначимо через z_1 та z_2 ($y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3$) найближчі до точки y_2 нулі цієї різниці. Тоді на інтервалі (z_1, z_2) буде $\psi(x) < 0$ (та $\psi(z_2) = 0$). Таким чином, на інтервалі (y_2, z_2) існує така точка x_1, що $\psi'(x_1) > 0$ і отже $|r'(f'', x_1)| > \left|r'\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_1\right)\right|$. Нехай $x_0 \in (0, x_1)$ – така точка, що $|r(f'', x_1)| = \left|r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0\right)\right|$. Тоді обов'язково

$$|r'(f'', x_1)| > \left|r'\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0\right)\right| . \tag{5}$$

Але ця нерівність суперечлива. Дійсно,

$$\left|r'\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0\right)\right| = \frac{1}{\dfrac{1}{\left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}\left(x_0^1\right)\right|} + \dfrac{1}{\left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}\left(x_0^2\right)\right|}},$$

де точки x_0^1 та x_0^2 є такими, що $\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}\left(x_0^1\right) = \widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}\left(x_0^2\right) = \left|r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0\right)\right|$. До того ж існує щонайменше дві точки x_1^1 та x_1^2 такі, що $\left|f''\left(x_1^2\right)\right| = \left|f''\left(x_1^1\right)\right| = |r(f'', x_1)|$ і

$$|r'(f'', x_1)| \leq \frac{1}{\dfrac{1}{\left|f'''\left(x_1^1\right)\right|} + \dfrac{1}{\left|f'''\left(x_1^2\right)\right|}} .$$

За теоремою 2 маємо $\left|f'''(x_1^1)\right| \le \left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}(x_0^1)\right|$ і $\left|f'''(x_1^2)\right| \le \left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}(x_0^2)\right|$. Але тоді

$$\left|r'(f'', x_1)\right| \le \left|r'(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0)\right|,$$

що суперечить (5).

Нарешті,

$$\int_0^{2h} r(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x)dx \ge \int_0^{2h} r(f'', x)dx.$$

Дійсно, згідно з властивостями переставлень ця нерівність еквівалентна нерівності

$$\int_{-h}^{h} \left|\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x)\right|dx \ge \int_{-h}^{h} \left|f''(x)\right|dx,$$

яка є частковим випадком результату Б. Боянова і Н. Найдьонова [11, теорема 3].

Ураховуючи все вищесказане, бачимо, що різниця $\psi(x)$ змінює знак з «+» на «–» та інтеграл від $\psi(x)$ по інтервалу $[0,\overline{x}]$, де вона додатна, більший за інтеграл по інтервалу $[\overline{x},2h]$, де вона від'ємна. Таким чином, первісна $\Psi(x) = \int_0^x \psi(x)dx$, зростаючи до точки $\overline{x}$ та спадаючи після неї, зменшується на величину, яка менша за максимальне значення $\psi(x)$ у точці $\overline{x}$, і отже залишається невід'ємною. Нерівність (4) доведено.

Тоді, згідно з лемою 3.2.6 [6, с. 114]

$$\int_0^{2h} r(f'', x)r(g, x)dx \le \int_0^{2h} r(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x)r(g, x)dx. \tag{6}$$

Повернемося тепер до нашої оцінки. Враховуючи властивості переставлень та нерівність (6), маємо

$$\left|f(h) - f(0)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-h}^{h} f''(x)g(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_0^{2h} r(f'', x)r(g, x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^{2h} r(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x)r(g, x)dx = \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} \widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x)g(x)dx = \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0),$$

що й потрібно було довести.

2) Нехай тепер $\frac{\pi}{2\lambda} \le h < \frac{\pi}{\lambda}$. Якщо припустити, що для деякого h

$$\left|f(h) - f(0)\right| > \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0),$$

то одержуємо суперечність з лемою 3.3.1 [6, с. 119], яка використовується при доведенні теореми 2, і отже, оскільки $f(x)$ та $\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(x)$ задовольняють умови теореми 2, маємо

$$\left|f(h) - f(0)\right| \le \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0).$$

3) Для $h \in \left[\frac{\pi}{\lambda}, +\infty\right)$ ця нерівність негайно випливає з обмеження $\|f\|_\infty = \|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\|_\infty$.

Використовуючи доведену нерівність, одержуємо (зауважимо, що константа $\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}$ є від'ємною при розглядуваних значеннях α)

$$\left|(D^\alpha f)(0)\right| \le \frac{-1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\left|f(h)+f(-h)-2f(0)\right|}{h^{1+\alpha}} dh \le$$

$$\le \frac{-1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h)+\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(-h)-2\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0)}{h^{1+\alpha}} dh =$$

$$= -\left(D^\alpha \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\right)(0) \le \left|\left(D^\alpha \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\right)(0)\right| ,$$

тобто оцінку (3) доведено. З цієї оцінки випливає нерівність

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r+\alpha} \|D^\alpha \widetilde{\varphi}_r\|_\infty .$$

Підставляючи в одержану нерівність λ, яке за припущенням було вибране рівним $\lambda = \left(\|\widetilde{\varphi}_r\|_\infty \|f\|_\infty^{-1}\right)^{\frac{1}{r}}$, для функцій з $\|f^{(r)}\|_\infty = 1$ отримуємо нерівність (2):

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha \widetilde{\varphi}_r\|_\infty}{\|\widetilde{\varphi}_r\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}} \|f^{(r)}\|_\infty^{\frac{\alpha}{r}} .$$

Якщо тепер взяти довільну функцію f таку, що $\|f^{(r)}\|_\infty > 0$, то, розглядаючи функцію $f_* = \frac{f}{\|f^{(r)}\|_\infty}$ та застосовуючи до неї доведену нерівність, одержуємо, що нерівність (2) має місце для всіх функцій $f \in L^r_{\infty,\infty}(R)$. Коли $r = 2$, то для $\widetilde{\varphi}_2 \in L^2_{\infty,\infty}(R)$ нерівність перетворюється на рівність, оскільки $\|\widetilde{\varphi}_2''\|_\infty = 1$. Теорему доведено.

Для $r > 2$ функція $\widetilde{\varphi}_r \notin L^r_{\infty,\infty}(R)$, оскільки вже її друга похідна має розриви в точках $-\pi, \pi$. Тому в цьому випадку ми не можемо застосувати нашу нерівність до $\widetilde{\varphi}_r$ і не можемо нічого сказати про точність доведеної нерівності.

Застосувавши до нерівностей (1) та (2) метод Стейна [13] (див. також [1, с. 84]), одержимо їхні аналоги у просторі $L_p(R)$, $1 \le p < \infty$; при цьому питання про точність одержаних нерівностей залишається відкритим.

Теорема 4. *1) Нехай* $\alpha \in (0,1)$. *Для всіх функцій* $f \in L^2_{p,p}(R)$, $1 \le p < \infty$, *справедливі нерівності*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}f\right\|_p \le \frac{\left\|D_{\pm}^{\alpha}\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}}{\left\|\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}} \left\|f\right\|_p^{1-\frac{\alpha}{2}} \left\|f''\right\|_p^{\frac{\alpha}{2}}.$$

2) Нехай $\alpha \in (0,2)$ *і* $r = 2,3,\ldots$ *Тоді для всіх функцій* $f \in L_{p,p}^{r}(R), 1 \le p < \infty$, *справедлива нерівність*

$$\left\|D^{\alpha}f\right\|_p \le \frac{\left\|D^{\alpha}\widetilde{\varphi}_r\right\|_{\infty}}{\left\|\widetilde{\varphi}_r\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{r}}} \left\|f\right\|_p^{1-\frac{\alpha}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|_p^{\frac{\alpha}{r}}.$$

Бібліографічні посилання

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов // К., 2003. – 590 с.
2. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку / В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурілова // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2001, Вип.6. – С. 16–20.
3. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных в многомерном случае / В.Ф. Бабенко, М.С. Чурилова // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2003, Вип.8. – С. 26–30.
4. **Гейсберг С.П.** Обобщение неравенства Адамара. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций // Сб. науч. тр. ЛОМИ. – 1965. – 50. – С. 42–54.
5. **Гейсберг С.П.** Дробные производные ограниченных на оси функций // Известия вузов. – Математика 11 (1968). – С. 51–69.
6. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближений. – М., 1987. – 424 с.
7. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения./ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев // Минск, 1987. – 650 с.
8. **Чурилова М.С.** О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных на отрезке // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2005, Вип.10. – С. 47–56.
9. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory, Banach center publications. – 1979. – Vol. 4. – P. 19–34.
10. **Babenko V.F.** On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives / V.F. Babenko, M.G. Churilova // East Journ. on Approx. – 2002. – V.8, № 4. – P. 437–446.
11. **Bojanov B.** An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. A solution of Erdos problem / B. Bojanov, N. Najdenov // Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – Vol. 78. – P. 263–280.
12. **Magarill-Il'yaev G.G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G.G. Magarill-Il'yaev, V.M. Tikhomirov // Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37–47.
13. **Stein E.M.** Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – V. 65, № 3. – P. 582–592.

Надійшла до редколегії 20.02.08.