УДК 512.544

Н.А. Турбай

Днепропетровский национальный университет

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ FC-ГРУПП, В КОТОРЫХ УСЛОВИЕ ПЕРЕСТАВЛЯЕМОСТИ – ТРАНЗИТИВНО

Розглянуто поширення на клас періодичних локально розв'язних FC-груп важливих характеристик скінченних розв'язних PT-груп.

Подгруппа H группы G называется *переставляемой или квазинормальной*, если она перестановочна с каждой подгруппой, т. е. HK = KH для каждой подгруппы K группы G. Свойства переставляемых подгрупп начали изучаться достаточно давно, сначала в рамках теории конечных групп [8, 9], а позднее и бесконечных [12]. Строение групп, все подгруппы которых переставляемы, было изучено довольно давно [11, раздел 2.4]. Разнообразные свойства переставляемых подгрупп продолжали изучаться преемущественно в теории конечных групп. В частности, исследовались конечные группы, в которых свойство переставляемости является транзитивным. Такие группы были названы *PT-группами.* Конечные разрешимые PT-группы были описаны Д. Цахером [14], неразрешимые конечные PT-группы были изучены Д. Робинсоном [10]. Изучение бесконечных PT-групп еще только начинается. В [2] было начато изучение периодических локально разрешимых FC-групп, в которых свойтво переставляемости является транзитивным. Выбор класса периодических FC-групп обусловлен тем обстоятельством, что он имеет достаточно развитую силовскую структуру и по многим аспектам близок к классу конечных групп. Поэтому естественно начинать изучение бесконечных PT-групп и их характеристик именно в этом классе. Данная работа является продолжением [2]. Ее цель – расширение на класс периодических локально разрешимых FC-групп важных характеристик конечных разрешимых PT-групп, которые были получены в [5].

Группа G называется модулярной, если решетка ее всех подгрупп является модулярной, т. е. для всех подгрупп X, Y, Z группы G таких, что $X \le Z$ имеет место следующее равенство $\langle X, Y \rangle \cap Z = \langle X, Y \cap Z \rangle$.

По теореме Ивасавы [11, теорема 2.4.14] локально конечная p–группа, p – простое число, является модулярной тогда и только тогда, когда всякая ее подгруппа переставляема в G. Локально конечная модулярная p–группа G имеет следующую структуру [11, теорема 2.4.14].

Пусть G – локально конечная модулярная p-группа.

Если $p \neq 2$, то $G = B\langle a \rangle$, где B – нормальная абелева подгруппа периода p^k, и найдется такое натуральное число t, что $t = 1 + p^m$, $m \le k \le m + d$, где $p^d = |G/B|$ и $a^{-1} b a = b^t$ для всех $b \in B$.

Если $p = 2$, то либо G – дедекиндова группа, либо $G = B < a >$, где снова B – нормальная абелева подгруппа периода p^k, и найдется такое натуральное число t, что $t = 1 + p^m$, $2 \le m \le k \le m + d$, где $p^d = |G/B|$ и $a^{-1} b a = b^t$ для всех $b \in B$. В каждом из этих случаев, G – ограничена и нильпотентна.

Пусть p – простое число. Будем говорить, что группа G *принадлежит классу* $\boldsymbol{X}_p$, если G удовлетворяет следующему условию: *если P – силовская p–подгруппа G, то каждая подгруппа P переставляема в $N_G(P)$.*

Лемма 1. *Пусть G – периодическая группа. Включение $G \in \boldsymbol{X}_p$ имеет место тогда и только тогда, когда каждая силовская p-подгруппа P группы G модулярна и $< a >^{< x >} = < a >$ для всякого элемента $a \in P$ и всякого p'-элемента $x \in N_G(P)$.*

Это утверждение –[5, лемма 2]. Она была сформулирована для конечных групп, однако лемма 2 верна и для бесконечных периодических групп.

Лемма 2. *Пусть G – периодическая группа и $G \in \boldsymbol{X}_p$ для некоторого простого числа p. Если P – силовская p-подгруппа G, то либо $N_G(P)=PC_G(P)$, либо P – абелева.*

Доказательство. Предположим, что $N_G(P) \ne P\ C_G(P)$, тогда подмножество $N_G(P) \setminus C_G(P)$ содержит неединичный p'-элемент x. Ввиду леммы 1 x индуцирует на P неединичный степенной автоморфизм. Допустим, что P – неабелева. Тогда P включает в себя конечную неабелеву подгруппу D. Поскольку D является $< x >$ – инвариантной, то x индуцирует на конечной неабелевой подгруппе D неединичный степенной автоморфизм. Однако это противоречит [7, лемма 5]. Полученное противоречие и доказывает комутативность P.

Утверждение 1. *Пусть G – периодическая FC-группа. Если силовская p-подгруппа P группы G модулярна и $N_G(P) = PC_G(P)$, то $G = \boldsymbol{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}$ – семейство всех конечных нормальных подгрупп G. Если $K \in \mathbf{L}$, то индекс $|PK : P|$ будет конечным, а потому P включает в себя подгруппу L, которая нормальна в PK и имеет в ней конечный индекс. Фактор-группа PK/K является p-группой и поскольку G – FC-группа, она включает в себя конечную нормальную подгруппу D/K со свойством PK/K = (D/K)(LK/K). Тогда $S = D \cap P$ – силовская p-подгруппа D [13, теорема 5.4]. Пусть S – силовская p-подгруппа D. Так как SK/K – силовская p-подгруппа D/K, то из того факта, что D/K – p-группа получаем равенство SK = D. Из равенства PK = DLK вытекает теперь, что PK = SLK. Учитывая включение $SL \le P$, получаем

$$P = P \cap PK = P \cap SLK = SL(P \cap K) \le SL(P \cap D) = SL.$$

Итак, SL = P – силовская p-подгруппа. Поскольку L – нормальная подгруппа PK, то для любого элемента $x \in PK$ будем иметь $x^{-1}(SL)x = (x^{-1}Sx)(x^{-1}Lx) = x^{-1}Sx\,L$. Отсюда вытекает включение $N_{PK}(S) \le N_{PK}(P)$. С другой стороны, $C_{PK}(P) \le C_{PK}(S) \le N_{PK}(S)$, так что имеем

$$N_{PK}(S) = N_{PK}(S) \cap N_{PK}(P) = N_{PK}(S) \cap (P\ C_{PK}(P)) = C_{PK}(P)\ (N_{PK}(S) \cap P) =$$

$$C_{PK}(P)\, N_P(S) = C_{PK}(P)P = N_{PK}(P).$$

Поскольку P – нормальная силовская p-подгруппа $N_{PK}(P)$, то из теоремы С.Н. Черникова [3] получаем разложение $N_{PK}(P) = P \leftthreetimes Q$, где Q – силовская p'-подгруппа $N_{PK}(P)$. Учитывая условия леммы, получаем равенство $N_{PK}(S) = P \times Q$. Так как PK/D – p-группа, то $Q \le D$. Теперь

$$N_D(S) = (N_{PK}(S) \cap D) = PQ \cap D = Q\,(P \cap D) = Q \times S.$$

Отсюда получаем равенство $N_D(S) = SC_D(S)$. Применяя теперь [4, теорема 1], получим, что $D = \mathbf{O}_{p'}(D) \leftthreetimes S$. В частности, $R = \mathbf{O}_{p'}(D)$ – нормальная силовская p'-подгруппа D, а потому R – характеристическая подгруппа D. Но тогда R – нормальная силовская p'-подгруппа PK. Применяя снова теорему С.Н. Черникова [3], получим разложение $PK = \mathbf{O}_{p'}(PK) \leftthreetimes P$. Так как $\cup_{K \in \mathbf{L}} K = G$, то и $\cup_{K \in \mathbf{L}} KP = G$. Если H – такой элемент $\mathbf{L}$, что $K \le H$, то $PH = \mathbf{O}_{p'}(PH) \leftthreetimes P$ и $\mathbf{O}_{p'}(PK) \le \mathbf{O}_{p'}(PH)$. Отсюда получаем, что $\cup_{K \in \mathbf{L}} \mathbf{O}_{p'}(PK)$ – нормальная силовская p'-подгруппа G и $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$.

Следствие. *Пусть G – периодическая FC-группа и $G \in \mathbf{X}_p$ для некоторого простого числа p. Если P – силовская p-подгруппа G и P – неабелева, то $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 P – модулярна. Поскольку P – неабелева, то из леммы 2 получаем равенство $N_G(P) = PC_G(P)$. Применяя теперь утверждение 1, приходим к равенству $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$.

Пусть G – группа. Пересечение всех ее нормальных подгрупп H, определяющих локально нильпотентные фактор-группы G/H, назовем *локально нильпотентным резидуалом группы* G.

Отметим, что если G – FC-группа и L – ее локально нильпотентный резидуал, то G/L – гиперцентральная группа [13, теорема 1.9 и следствие 1.15].

Лемма 3. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть L – ее локально нильпотентный резидуал. Если $G \in \mathbf{X}_p$ для всех простых чисел p, то силовская p-подгруппа L будет абелевой для любого $p \in \Pi(L)$.*

Доказательство. Обозначим через π множество тех простых чисел p, для которых силовские p-подгруппы G неабелевы. Если $p \in \pi$, то из следствия утверждения 1 получаем, что $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes S_p$, где S_p – силовская p-подгруппа G. Положим $D = \cap_{p \in \pi} \mathbf{O}_{p'}(G)$. Из теоремы Рэмака получаем вложение

$$G/\mathbf{O}_{\pi'}(G) \hookrightarrow \Pi_{p \in \pi} G/\mathbf{O}_{p'}(G) \cong \Pi_{p \in \pi} S_p.$$

Поскольку G – локально конечна, $G/\mathbf{O}_{\pi'}(G)$ является локально нильпотентной. А это влечет за собой включение $L \le \mathbf{O}_{\pi'}(G)$. Утверждение леммы вытекает теперь из выбора множества π.

Утверждение 2. *Пусть P – локально конечная p-группа, p – простое число, и G – ее конечная группа автоморфизмов. Если $p \notin \Pi(G)$, то $P = C_P(G)$ $[P, G]$. Более того, если P – абелева, то $P = C_P(G) \times [P, G]$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}$ – локальная система конечных подгрупп P. Поскольку G – конечна, то L^G также будет конечной для любого $L \in \mathbf{L}$. Поэтому будем предполагать, что все члены системы $\mathbf{L}$ – будут G – инвариантными. Из [6, теорема 5.3.5] получаем для любого $B \in \mathbf{L}$ равенство $B = C_B(G)$ $[B, G]$. Если C – другой элемент $\mathbf{L}$, причем $B \leq C$, то $C_B(G) \leq C_C(G)$ и $[B, G] \leq [C, G]$. Эти включения доказывают равенства $C_P(G) = \cup_{B \in \mathbf{L}} C_B(G)$ и $[P, G] = \cup_{B \in \mathbf{L}} [B, G]$, из которых, в свою очередь, вытекает, что $P = C_P(G)$ $[P, G]$.

Если P – абелева, то $B = C_B(G) \times [B, G]$ [6, теорема 5.2.3]. Отсюда $C_P(G) \cap [P, G] = \langle 1 \rangle$, а потому $P = C_P(G) \times [P, G]$.

Лемма 4. *Пусть G – периодическая группа и $G \in \mathbf{X}_p$. Предположим, что P – абелева силовская p-подгруппа G. Если $N_G(P) \neq C_G(P)$, то последний член нижнего центрального ряда группы G включает в себя P.*

Доказательство. Положим $U = N_G(P)$ и выберем во множестве $N_G(P) \setminus C_G(P)$ неединичный p'-элемент g. Ввиду леммы 1, g индуцирует на P неединичный степенной автоморфизм. Ввиду утверждения 2, $P = C_P(g) \times [P, \langle g \rangle] = C_P(g) \times [P, g]$. Учитывая выбор элемента g, будем иметь $P \neq C_P(g)$, так что $[P, g] \neq \langle 1 \rangle$. Предположим, что $C_P(g) \neq \langle 1 \rangle$ и выберем в $C_P(g)$ элемент c порядка p. Пусть далее a – элемент $[P, g]$, имеющий порядок p. Так как $a \notin C_p(g)$, то $a^g = a^d$, где d – натуральное число, взаимно простое с p. Более того, $d \not\equiv 1 (\mathbf{mod}\ p)$. Тогда $(ac)^g = a^g c^g = a^d c$. С другой стороны, принимая во внимание, что $ac \notin C_P(g)$, получаем равенство $(ac)^g = (ac)^t$, где t – также натуральное число, взаимно простое с p и $t \not\equiv 1 (\mathbf{mod}\ p)$. Следовательно, $a^d c = (ac)^t = a^t c^t$, а потому $d \equiv t\ (\mathbf{mod}\ p)$ и $t \equiv 1 (\mathbf{mod}\ p)$. Это противоречие доказывает равенство $C_P(g) = \langle 1 \rangle$, из которого вытекает, что $[P, g] = P$. В частности, $[P, U] = P$. Таким образом, $P = [P, U] \leq [G, G] = \gamma_1(G)$. Допустим, что уже доказано включение $P \leq \gamma_\beta(G)$ для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$. Если α – предельное число, то $P \leq \cap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G) = \gamma_\alpha(G)$. Если α не является предельным, то $P = [P, U] \leq [\gamma_{\alpha - 1}(G), G] = \gamma_\alpha(G)$. Поскольку это верно для любого порядкового числа α, то последний член $\gamma_\sigma(G)$ нижнего центрального ряда включает в себя P.

Следствие. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in \mathbf{X}_p$ для некоторого простого числа p. Если P – такая абелева силовская p-подгруппа G, что $N_G(P) \neq C_G(P)$, то локально нильпотентный резидуал G включает в себя P.*

Доказательство. Обозначим через L локально нильпотентный резидуал G. Выше уже отмечалось, что G/L будет локально нильпотентной. Тогда $G/L = \times_{p \in \Pi(G/L)} S_p/L$, где S_p/L – силовская p-подгруппа G/L. Заметим, что S_p/L – образ силовской p-подгруппы G [13, теорема 5.4]. Если S_p/L – неабелева, то будучи модулярной, она нильпотентна. Отсюда вытекает, что либо G/L – нильпотентна, либо L совпадает с членом нижнего центрального ряда группы G, имеющего номер ω. Поэтому теперь можно применить лемму 4.

Лемма 5. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in \mathfrak{X}_p$ для некоторого простого числа p. Предположим, что силовская p-подгруппа P группы G абелева. Если A – нормальная p-подгруппа G, то каждая подгруппа A будет G – инвариантной. Кроме того, если $N_G(P) = C_G(P)$, то $A \leq \zeta(G)$.*

Доказательство. Если P нормальна в G, то утверждение вытекает из леммы 1. Поэтому рассмотрим случай, когда P не является нормальной. В этом случае найдется такая конечная нормальная подгруппа L, что $P \cap L$ не нормальна в L. Будучи нормальной, A содержится в P. Пусть x – произвольный элемент $N_G(P)$, $a \in A$. Если x – p-элемент, то $x \in P$ и $\langle a \rangle^{\langle x \rangle} = \langle a \rangle$, поскольку P – абелева. Если x – p'-элемент, то $\langle a \rangle^{\langle x \rangle} = \langle a \rangle$ ввиду леммы 1. Пусть y – произвольный элемент G, $K = L\langle a, y \rangle^G$. Пересечение $S = K \cap P$ будет силовской p-подгруппой K [13, теорема 5.4]. Поскольку K – конечна, то S – пронормальна в K. Из выбора K вытекает, что S не может быть нормальной в K, а тогда $N_K(S)$ – абнормальна в K. В частности, $(N_G(S))^K = K$. Имеем теперь $y = y_1 \ldots y_m$, где $y_j \in g_j^{-1} N_K(S)\, g_j = N_K(g_j^{-1}Sg_j)$, $1 \leq j \leq m$. Поскольку A – нормальна в G, $A = g_j^{-1}Ag_j \leq g_j^{-1} S\, g_j$, $1 \leq j \leq m$. Из доказанного выше вытекают равенства $\langle a \rangle^{\langle y_j \rangle} = \langle a \rangle$ для всех j, $1 \leq j \leq m$. Следовательно, и $\langle a \rangle^{\langle y \rangle} = \langle a \rangle$.

Предположим теперь, что $N_G(P) = C_G(P)$. Из утверждения 1 получаем тогда равенство $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$. Отсюда, уже нетрудно получить включение $A \leq \zeta(G)$.

Следствие 1. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in \mathfrak{X}_p$ для всех простых чисел p. Если R – локально нильпотентный радикал G, то G/R – гиперцентральна.*

Доказательство. Пусть $p \in \Pi(R)$ и R_p – силовская p-подгруппа R. Если силовские p-подгруппы G абелевы, то R_p также абелева и из леммы 5 получаем, что каждая подгруппа R_p будет G – инвариантной. Отсюда вытекает, что $G/C_G(R_p)$ – абелева [11, теорема 1.5.1]. Предположим теперь, что силовская p-подгруппа P группы G неабелева. Из следствия утверждения 1 получаем разложение $G = \mathbf{O}_{p'}(G) \leftthreetimes P$. Так как R_p – нормальна в G, то $\mathbf{O}_{p'}(G) \leq C_G(R_p)$, а это означает, что $G/C_G(R_p)$ – p-группа. Положим $C = \cap_{p \in \Pi(R)} C_G(R_p)$. Из теоремы Рэмака получаем вложение $G/C \hookrightarrow \Pi_{p \in \Pi(R)} G/C_G(R_p)$. Так как G – локально конечна, то G/C должна быть локально нильпотентной, а значит, и гиперцентральной [13, следствие 1.15]. Очевидно, $C = C_G(R)$. Будучи локально разрешимой, G – радикальна [13, следствие 1.15]. А потому $C_G(R) \leq R$ [1, теорема 2]. Следовательно, G/R – гиперцентральна.

Следствие 2. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in X_p$ для всех простых чисел p. Тогда локально нильпотентный резидуал группы G является абелевой подгруппой.*

Доказательство. Пусть L – локально нильпотентный резидуал G. Из следствия 1 леммы 5 получаем, что L – локально нильпотентна. Из леммы 3 вытекает, что силовская p-подгруппа L – абелева для любого простого p. Тогда и L – абелева.

Следствие 3. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in X_p$ для всех простых чисел p. Тогда G – гиперциклическая.*

Доказательство. Обозначим через L локально нильпотентный резидуал G. Ввиду следствия 2 леммы 5 L – абелева. Кроме того, из доказательства леммы 3 можно увидеть, что силовские p-подгруппы G будут абелевыми для всех $p \in \Pi(L)$. Пусть L_p – силовская p-подгруппа L. Ввиду леммы 5 каждая подгруппа L_p является G-инвариантной. Так как G/L – локально нильпотентная FC-группа, то она гиперцентральна [13, следствие 1.15], откуда и вытекает, что G – гиперциклическая.

Лемма 6. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа и пусть $G \in X_p$ для всех простых чисел p. Пусть далее η – множество тех простых чисел p, для которых силовские p-подгруппы G абелевы и не входят в центр своего нормализатора. Тогда силовская p-подгруппа S_p группы G будет нормальной в G для каждого $p \in \eta$ и $\times_{p \in \eta} S_p$ совпадает с локально нильпотентным резидуалом группы G.*

Доказательство. Пусть $p \in \Pi(G)$ и S_p – силовская p-подгруппа G. Обозначим через L локально нильпотентный резидуал группы G. Если S_p не является абелевой, то из следствия утверждения 1 получаем равенство $S_p \cap L = \langle 1 \rangle$, которое показывает, в частности, что $p \notin \Pi(L)$. Если же S_p – абелева и $N_G(S_p) = C_G(S_p)$, то, используя утверждение 1, снова получим, что $p \notin \Pi(L)$. Это означает, что $\Pi(L) \subseteq \eta$. Наоборот, если $p \in \eta$, то лемма 4 обеспечивает включение $S_p \leq L$. Ввиду леммы 3 L – абелева, поэтому S_p будет нормальной в G и $L = \times_{p \in \eta} S_p$.

Теорема. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа. Включение $G \in X_p$ имеет место для всех простых чисел p тогда и только тогда, когда G – PT-group.*

Доказательство. Если G – PT-группа, то очевидно, что включение $G \in X_p$ имеет место для всех простых чисел p.

Наоборот, пусть $G \in X_p$ для всех простых чисел p. Как обычно, обозначим через L локально нильпотентный резидуал группы G. Из леммы 3 получаем, что L – абелева. Из леммы 6 вытекает равенство $\Pi(L) \cap \Pi(G/L) = \varnothing$. Если через S_p обозначить силовскую p-подгруппу G, то S_pL/L – силовская p-подгруппа G/L [13, теорема 5.4]. Из леммы 1 получаем, что S_pL/L будет модулярной для всех $p \in \Pi(G/L)$. Отсюда вытекает, что каждая подгруппа G/L является переставляемой. Наконец, из леммы 5 следует, что каждая подгруппа

L нормальна во всей группе G, а следствие 3 леммы 5 показывает, что G – гиперциклическая. Тогда $2 \notin \Pi(L)$. По теореме С.Н. Черникова [3], $G = L \leftthreetimes D$ для некоторой подгруппы D. Применяя основной результат [2], получим, что G – PT-группа.

Для конечных разрешимых групп этот результат был получен в [5, теорема A].

Отметим одно важное следствие.

Пусть p – простое число. Будем говорить, что группа G *принадлежит классу* C_p, если она удовлетворяет следующему условию:

Если P – силовская p-подгруппа G, то каждая подгруппа P нормальна в $N_G(P)$.

Следствие. *Пусть G – периодическая локально разрешимая FC-группа. Включение* $G \in C_p$ *имеет место для всех простых чисел p тогда и только тогда, когда G – T-группа с дедекиндовой силовской 2-подгруппой.*

Доказательство. Как обычно, обозначим через L локально нильпотентный резидуал группы G. Если $G \in \mathbf{C}_p$, то очевидно $G \in \mathbf{X}_p$, и можно использовать доказанную выше теорему. Если через S_p обозначить силовскую p-подгруппу G, то всякая подгруппа S_p будет нормальной в S_p. Поэтому или S_p является абелевой, когда $p \neq 2$, или S_2 – дедекиндова. Отсюда вытекает, что всякая подгруппа G/L нормальна в G/L. Из леммы 5 вытекает, что всякая подгруппа L будет G-инвариантной. Отсюда уже нетрудно получить, что G является T-группой.

Библиографические ссылки

1. **Плоткин Б.И.** Радикальные группы// Матем. Сборник. 37 (1955), – С. 507 – 526.
2. **Цыба Н.А.** FC-группы, в которых условие переставляемости транзитивно// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. 11(2006), – С. 104 – 109.
3. **Черников С.Н.** О дополняемости силовских П – подгрупп в некоторых классах бесконечных групп// Матем. Сборник. 37(1955), – С.557 – 566.
4. **Ballester – Bolinches A., Esteban – Romero R.** Sylow permutable subgroups of finite groups, Journal Algebra. 251 (2002), – P.727 – 738.
5. **Beidleman J.C., Brewster B. and Robinson D.J.S.** Criteria for permutability to be transitive in finite groups, Journal Algebra. 222 (1999), – P. 400 – 412.
6. **Gorenstein D.** Finite groups. HARPER & ROW: New York – 1968. 527 p.
7. **Huppert B.** Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen, Archiv Math. 12 (1961), – P. 161 – 169.
8. **Ore O.** On the application of structure theory to groups, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), – P. 801 – 806.
9. **Ore O.** Structures and group theory I. Duke Math. J. – 1937, 3, – P. 149 – 173.
10. **Robinson D.J.S.** The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation. Journal Austral. Math. Soc. – 70(2001), – P. 143 – 159.
11. **Schmidt R.** Subgroups lattices of groups. Walter de Gruyter, Berlin, 1994. 572 p.
12. **Stonehewer S.E.** Permutable subgroups of infinite groups// Math. Z. – 1972, 125, – P. 1 – 16.
13. **Tomkinson M.J.** FC – groups. PITMAN: Boston – 1984. 171p.
14. **Zacher G.** I gruppi risolubili finite in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi – normali. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 37(1964), № 8, – P. 150 – 154.

Надійшла до редколегії 16.03.07