ЛИТЕРАТУРА:

1. В. Ф. Каган, Теория поверхностей, ч. I, 1947 г.

2. Ю. Н. Ястребов, Б. С. Вакарчук, О некоторых аналитических признаках расположения прямых в пространстве Лобачевского. Труды Ленинградского института инженеров водного транспорта, вып. XXVI, 1959 г.

3. Б. С. Вакарчук, О сферическом отображении кривых и поверхностей в пространстве Лобачевского, УМЖ, № 1, 1960.

О приближении линейной функцией в L_2

В. Ф. СТОРЧАЙ.

Теорема. Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, К — произвольное положительное число и $h>0$ удовлетворяет уравнению $\omega(h)=Kh$

Пусть для функции $\Delta(x)=f(x)-l(x)$, где $f(x)\epsilon H_\omega$ и $l(x)=\pm Kx+\beta$ на промежутке $[a, b]$, $b-a\leqslant h$ выполнены следующие условия:

1. $$\int_a^b \Delta(t)\,dt=0,$$

2. $$l'(x)=-K\operatorname{sign}\int_a^x \Delta(t)\,dt,$$

3. $\Delta(x)$ меняет знак на (a, b) в единственной точке c. Тогда

$$\int_3^b \Delta^2(t)\,td \leqslant \frac{1}{4}\int_0^{b-a}[\omega(t)-Kt]^2\,dt \tag{1}$$

причем оценка на классе функций $f(x)\epsilon H_\omega$ точная.

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используется метод, который применялся Н. П. Корнейчуком при решении аналогичных экстремальных задач (см. [1], [2], [3]). Для определенности рассмотрим случай, когда $l(x)$ имеет вид $l(x)=Kx+\beta$. Тогда из предположений, сделанных в

теореме, следует, что для функции $\Delta(x)$ на промежутке (a, b) выполнены соотношения

$$\Delta(x) < 0 \, (a < x < c), \quad \Delta(x) > 0 \, (c < x < b). \tag{2}$$

Пусть

$$\Delta_1(x) = \int_a^x \Delta(t)\, dt.$$

В силу (2) функция $\Delta_1(x)$ строго убывает на (a, c) и строго возрастает на (c, b) и потому равенством

$$\Delta_1(x) = \Delta_1(\rho(x)) \quad (a \leqslant x \leqslant c, \; c \leqslant \rho(x) \leqslant b)$$

определена взаимно однозначно непрерывная и дифференцируемая функция $\rho(x)$, причем

$$\Delta(x) = \Delta_1(\rho(x))\, \rho'(x) \quad (a \leqslant x \leqslant c). \tag{3}$$

Обозначим через

$$M(f) = \int_a^b \Delta^2(t)\, dt = \int_a^c \Delta^2(t)\, dt + \int_c^b \Delta^2(t)\, dt.$$

Замена переменной $t = \rho(u)$ во втором интеграле дает

$$\int_c^b \Delta^2(t)\, dt = -\int_a^c \Delta^2(\rho(u))\, \rho'(u)\, du,$$

поэтому

$$M(f) = \int_a^c [\Delta^2(t) - \Delta^2(\rho t))\, \rho'(t)]\, dt.$$

Прибавляя и вычитая под знаком интеграла функции $\Delta^2(t)\rho'(t)$, $\Delta^2(\rho(t))$, $\Delta(t)\Delta(\rho(t))\,[1-\rho'(t)]$, можно получить следующие выражения для $M(f)$:

$$M(f) = \int_a^c \Delta^2(t)\,[1 - \rho'(t)]\, dt = \int_a^c [\Delta^2(t) - \Delta^2(\rho(t))]\, \rho'(t)\, dt.$$

$$M(f) = \int_a^c \Delta^2(\rho(t))\,[1 - \rho'(t)]\, dt + \int_a^c [\Delta^2(t) - \Delta^2(\rho(t))]\, dt;$$

$$M(f) = -\int_a^c \Delta(t)\,\Delta(\rho(t)\,[1-\rho'(t)]\,dt + \int_a^c \{\Delta^2(t) - \Delta^2(\rho(t))\,\rho'(t) +$$

$$+ \Delta(t)\,\Delta(\rho(t))\,[1-\rho'(t)]\}\,dt.$$

Складывая левые и правые части этих выражений, причем последнее дважды, получим

$$4M(f) = \int_a^c [\Delta(\rho(t)) - \Delta(t)]^2\,[1-\rho'(t)]\,dt +$$

$$+ \int_a^c \{[\Delta^2(t) - \Delta^2(\rho(t))]\,[1+\rho'(t)] + 2\Delta^2(t) - 2\Delta^2(\rho(t))\,\rho'(t) +$$

$$+ 2\Delta(t)\,\Delta(\rho(t))\,[1-\rho'(t)]\}\,dt = I_1 + I_2,$$

Так как в силу соотношений (2) и (3) $\rho'(x) = \dfrac{\Delta(x)}{\Delta(\rho(x))} < 0.$

то получим

$$I_2 = \int_a^c \Delta^2(\rho(t))\,[1+\rho'(t)]^2\,[\rho'(t)-1]\,dt \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$M(f) \leqslant \frac{1}{4}\int_a^c [\Delta(\rho(t)) - \Delta(t)]^2\,[1-\rho'(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_a^c \{[f(\rho(t)) - f(t)] - K[\rho(t)-t]\}^2\,[1-\rho'(t)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int_a^c \{\omega[\rho(t)-t] - K[\rho(t)-t]\}^2\,[1-\rho'(t)]\,dt.$$

Полагая $\rho(t) - t = u,$ получаем

$$M(f) = \int_a^b \Delta^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int_0^{b-a} [\omega(t) - Kt]^2\,dt.$$

В этом соотношении знак равенства нельзя отбросить. Действительно, зададим на $[a, b]$ функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega\left[2\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right] & \frac{a+b}{2} \leqslant t \leqslant b \\ -\frac{1}{2}\omega\left[-2\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right] & a \leqslant t < \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

и возьмем $l(t) = K\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$. Легко проверить, что $f_0(t) \in H_\omega$, функции $f_0(t)$ и $l(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы,

$$\int_a^b [f_0(t)-l(t)]^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{b-a} [\omega(t)-Kt]^2\,dt.$$

В случае, когда $l(x)$ имеет вид $l(x) = -Kx + \beta$ рассуждения аналогичны.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций, Доклады АН СССР, 141 (1961), 304—307.

2. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении непрерывных функций, Докторская диссертация, г. Москва, 1963.

3. Н. П. Корнейчук, О линейных методах приближения периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, Сборник работ механико-математических кафедр ДГУ, выпуск 6 (1961), 92—96.

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

С. П. ТУРОВЕЦ.

Обозначим через $KH^{(\alpha)}$ класс функций $f(x)$ периода 2π удовлетворяющих на всей действительной оси условию Липшица

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant K|x'-x''|^\alpha \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$