ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Известия АН СССР, серия матем. (20) 1956.
2. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.

К СИНТЕЗУ ОПТИМИЗИРУЮЩЕГО ЦИФРО-АНАЛОГОВОГО УСТРОЙСТВА МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ФОРМЕ

М. М. ИВАХНЕНКО, А. А. ЗЛАТКИН,

Пусть динамика системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = G[x(t),\ u(t)] \tag{1}$$

При начальных условиях

$$x(t)\,|_{t=0} = x_0(0). \tag{2}$$

Здесь $t \in [0, T]$ — независимая переменная величина (время);
$x(t)$ — фазовая координата системы;
$u(t)$ — управляющая функция.

Будем интересоваться следующим критерием цели управления.

$$I[u(t)] = \int_0^T F[x(t),\ u(t)]dt \tag{3}$$

при ограничении

$$u(t) \in U\,[0, T], \tag{4}$$

где $U[0, T]$ — закрытая область определения функционала (3), представляющая множество соответствующих гладких допустимых функций.

Требуется минимизировать функционал (3) при ограничениях (1), (2), (4).

Введем фиктивное время $\mu \in [0, T]$ и рассмотрим на интервале $[\mu, T]$, $0 \leqslant \mu \leqslant T$ вместо (3) функционал

$$I\,[u(t)] = \int_\mu^T F[x(t),\ u(t)]dt \tag{5}$$

Пусть целевая функция (цель управления) будет

$$I[x(\mu)] = \min_{u(t)\in U[\mu,\,T]} \int_{\mu}^{T} F[x(t),\ u(t)]dt. \tag{6}$$

Разделим $[\mu, T]$ на две произвольные части $[\mu, \mu+s]$, $[\mu+s, T]$ и применим к (6) „принцип оптимальности" Беллмана [1].

$$I[x(\mu)] = \min_{u(t)\in U[\mu,\,\mu+s[} \left\{ \int_{\mu}^{\mu+s} F[x(t),\ u(t)]dt + I[x(\mu+s)] \right\} \tag{7}$$

где $\mu \in [0,\ T-s]$.

Конечное граничное условие будет нулевым

$$I[x(T)] = 0. \tag{8}$$

Вместо (7) можно записать эквивалентное ему уравнение

$$I_{\mu}[x(\mu s)] = \min_{u(t)\in U[\mu s,\,(\mu+1)s]} \left\{ \int_{\mu s}^{(\mu+1)s} F[x(t),\ u(t)]dt + \right.$$

$$\left. + I_{\mu+1}[x(\mu+1)s)] \right\}, \tag{9}$$

где $\mu = 0, 1, \ldots, N-1$; $T = Ns$; $s = \text{const}$.

Следуя Л. М. Бойчуку [2], введем обозначения

$$\begin{aligned} &x(\mu)s = x_{\mu}(0); \quad x[(\mu+1)s] = x_{\mu}(s) \\ &x(t) = x_{\mu}(t) \qquad u(t) = u_{\mu}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (10) вместо (9) и (1) будем иметь

$$I_0[x_{\mu}(0)] = \min_{u_{\mu}(t)\in U[\mu s,\,(\mu+1)s]} \left\{ \int_{0}^{s} F[x_{\mu}(t),\ u_{\mu}(t)]dt + I_1[x_{\mu}(s)] \right\} \tag{11}$$

$$\frac{dx_{\mu}(t)}{dt} = G[x_{\mu}(t),\ u_{\mu}(t)]; \quad t \in [0, s]. \tag{12}$$

Из соображений разрешимости поставленной задачи осуществим на каждом шаге N-шагового процесса следующие прямолинейно-постоянные аппроксимации

$$u_{\mu}(t) \approx u_{\mu} \in U[\mu s,\ (\mu+1)s]; \quad \mu = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{13}$$

Аппроксимации (13) позволяют вместо (11) и (12) записать следующие рабочие формулы

$$I_0[x_\mu(0)] = \min_{u_\mu \in U[\mu s,(\mu+1)s]} \left\{ \int_0^s F[x_\mu(t), u_\mu(t)]dt + I_1[x_\mu(s)] \right\} \quad (14)$$

$$\frac{dx_\mu(t)}{dt} = G[x_\mu(t), u_\mu]; \quad t \in [0, s]. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) решаются на интервале $[0, s]$ одновременно при начальном условии $x_\mu(0)$. Ключом к решению уравнения (14) служит условие, получающееся из выражения (8)

$$I_1[x_{N-1}(s)] = 0. \quad (16)$$

Структура и алгоритм решения уравнений (14) и (15) приводят к функциональной блок-схеме цифро-аналогового управляющего устройства (ЦАУ), приведенной на рис. 1. Работа схемы начинается с установки на интеграторе R начального условия $[x_\mu(0)]_{\mu=0} = x_0(0)$ и ввода в память накопителя суммы E условия (16). При поступлении сигнала f_1 из блока управления БУ в блок хранения значений допустимых управляющих функций W на функциональные блоки G и F, а также на блок E из блока W выдается одно из значений $u_0 = u_{01}$ первого шага множества $u_0 \in U[0, s]$. Функции $G[x_0(t), u_{01}]$ и $F[x_0(t), u_{01}]$ подаются одновременно на входы соответствующих интеграторов R и L. Операции интегрирования блоком R осуществляются при начальном условии $x_0(0)$, а блоком L — при нулевом начальном условии. В процессе интегрирования на интервале $[0, s]$ решения $x_0(t)$ непрерывно подаются на функциональные блоки G и F. По истечении времени, равного s, величина $\int_0^s F[x_0(t), u_{01}]dt$ в соответствии с сигналом f_2, поступающим из блока управления в накопитель суммы, фиксируется последним. При этом в памяти накопителя суммы фиксируется также значение функции $u_0 = u_{01}$. В момент времени $t = s$ по команде f_3, поступающей из блока управления запоминающее устройство ЗУ фиксирует решение $x_0(t)|_{t=s} = x_0(s)$ и вводит в интегратор R в качестве начального условия величину $x_0(s) = x_1(0)$. Одновременно БУ посылает сигнал f_1 для выдачи из блока W в блоки G, F и E одного из допустимых значений $u_1 = u_{11}$ управляющей функции на втором шаге множества $u_1 \in U[s, 2s]$. Далее весь описанный цикл

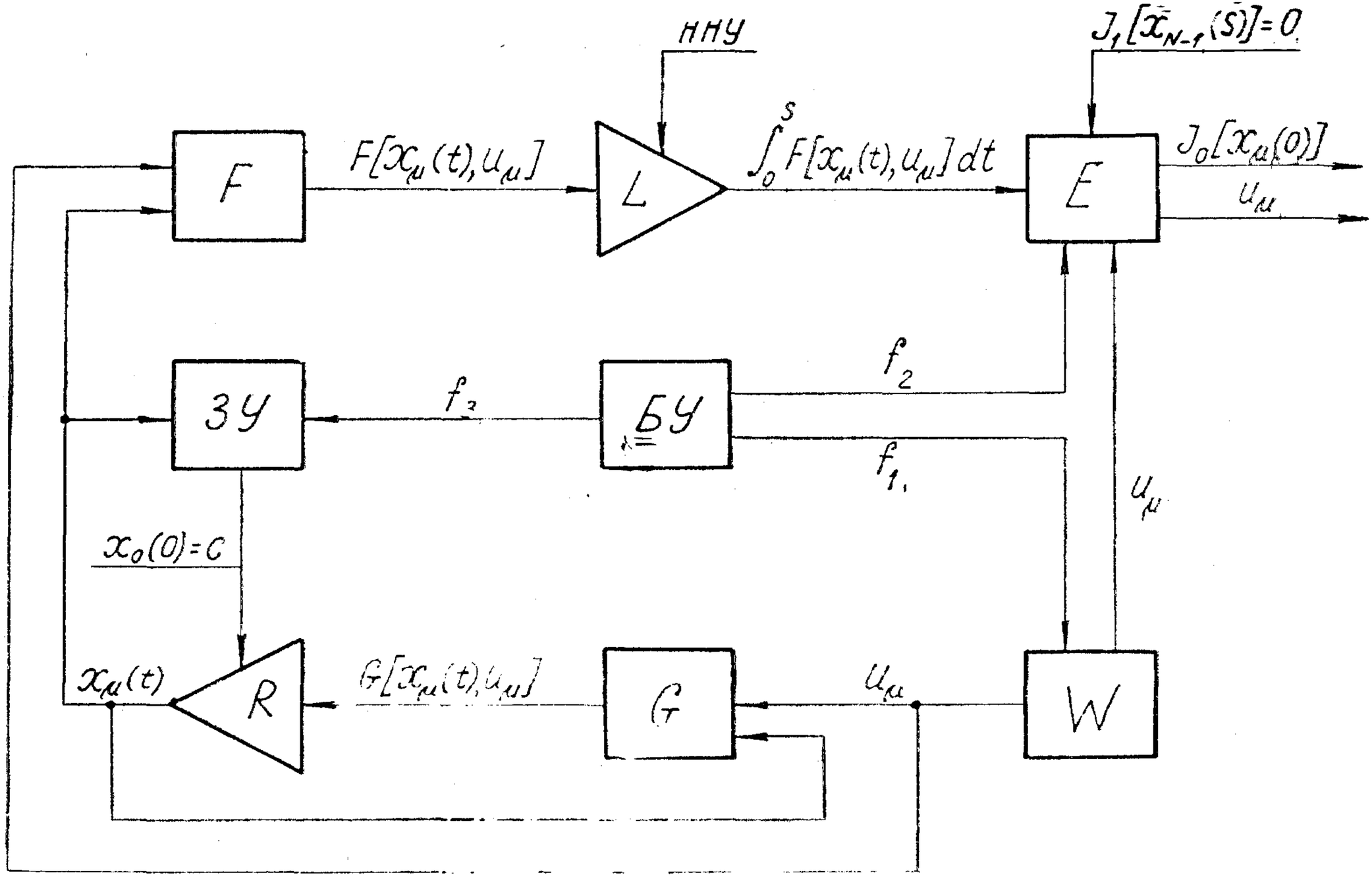

Рис. 1. Блок-схема цифро-аналогового управляющего устройства.

повторяется (N-1) раз, в результате чего в интегратор R в качестве начального условия поступает величина $x_{N-2}(S) = x_{N-1}(0)$ соответствующая исходному состоянию системы перед оптимизацией на последнем шаге. При оптимизации с начальным условием $x_{N-1}(0)$ для каждого значения управляющей функции u_{N-1} из множества ее допустимых значений на последнем шаге $U[(N-1)s, Ns]$ будет вычисляться и подаваться в накопитель суммы величина

$$\int_0^s F[x_{N-1}(t), u_{N-1}]\,dt. \tag{17}$$

Соответствующие значения u_{N-1}, входящие в (17) также переводятся из блока W в блок E по команде f_1 блока управления. Величина интегратора (17) суммируется в накопителе с выражением (16). Образующиеся при этом суммы по мере их появления в накопителе сравниваются между собой и меньшая из них вместе с соответствующим значением управляющей функции всякий раз сохраняется в накопителе. В результате оптимизации при начальном условии $x_{N-1}(0)$ накопителем будет зафиксирована величина

$$I_0[x_{N-1}(0)] = \int_0^s F[x_{N-1}(t), u_{N-1}]\,dt + I_1[x_{N-1}(s)],$$

а также минимизирующее значение управляющей функции u^*_{N-1} из множества ее допустимых значений на последнем шаге $U[(N-1)s, Ns]$. После этого накопитель вычисляет и сохраняет в памяти результат суммы

$$\int_0^s F[x_{N-2}(t), u_{N-2,1}]\,dt + I_0[x_{N-1}(0)] \tag{18}$$

при одновременном запоминании использованнго значения управляющей функции $u_{N-2,1}$ на предпоследнем шаге и ее минизирующего значения u^*_{N-1} на последнем шаге при начальном условии $x_{N-1}(0)$.

Следует отметить, что состояние $x_{N-1}(0)$ соответствует только одному значению $u_{N-2} = u_{N-2,1}$ из множества $u_{N-2} \in U[(N-2)s, (N-1)s]$. Поэтому в дальнейшем ЦАУ должно:

—ввести с помощью сигнала f_3 блока управления ранее вычисленное решение $x_{N-3}(s) = x_{N-2}(0)$ в качестве начального условия в интегратор R.

— задать сигналом f_1 блока управления следующее (новое) значение $u_{N-2} = u_{N-2,2} \in U[(N-2)s, (N-1)s]$ и решить (15) для $\mu = N-2$;

— для найденного нового состояния $x_{N-2}(s) = x_{N-1}(0)$ осуществить оптимизацию на последнем шаге и получить в накопителе новые значения величин $I_0[x_{N-1}(0)]$ и u^*_{N-1};

— вычислить в накопителе новое значение суммы

$$\int_0^s F[x_{N-2}(t), u_{N-2,2}]\,dt + I_0[x_{N-1}(0)] \tag{19}$$

— сравнить в блоке E результаты (18) и (19) и наименьший из них сохранить;

— сохранить также значения управляющей функции u_{N-2} и u^*_{N-1} на предпоследнем и последнем шагах, обусловившие наименьший из результатов (18) и (19) при начальном условии $x_{N-3}(s) = x_{N-2}(0)$;

— продолжать процесс оптимизации на двух последних шагах при начальном условии $x_{N-2}(0)$ до получения в памяти накопителя величины

$$I_0[x_{N-2}(0)] = \int_0^s F[x_{N-2}(t), u^*_{N-2}] + I_1[x_{N-2}(s)],$$

и также минимизирующих значений u^*_{N-2} и u^*_{N-1} управляющей функции соответственно на предпоследнем и последнем шагах;

— повторять описанный процесс решения до тех пор, пока в накопителе E появится результат в виде целевой функции (14) и вектора управляющей функции

$$u^*(t) = u_0^*, u_1^*, \ldots, u^*_{N-1}. \tag{20}$$

Поскольку в процессе решения допустимые значения управляющей функции u_μ на каждом шаге множества $U[\mu s (\mu+1) s]$, где $\mu = 0, 1 \ldots, N-1$, предполагались постоянными величинами, то искомый вектор управляющей функции (20) будет иметь на всем интервале $[0, T]$ вид ступенчатой функции.

Эффективность применения цифро-аналоговой системы в задачах динамического программирования состоит в том, что при определении оптимизирующего вектора управления (20) имеется возможность выбора наиболее выгодного приема решения уравнения (1) из числа существующих методов решения дифференциальных уравнений. В противоположность это-

му, использование в задачах динамического программирования ЦВМ полностью исключает такую возможность. Наличие аналоговой части цифро-аналоговой системы дает возможность решать задачи динамического программирования в реальном масштабе времени. Это позволяет использовать цифро-аналоговый комплекс в качестве управляющего устройства системы.

Выводы

1. Для решения рассматриваемой вариационной задачи использована идея непрерывно-дискретной формы динамического программирования. Это позволило на каждом временном шаге сохранить в первоначальном виде (в форме обычных производных) дифференциальное уравнение системы (15) при одновременном соблюдении «принципа оптимальности» БЕЛЛМАНА в процессе перехода от шага к шагу (уравнение 14).

2. Благодаря введению непрерывно-дискретной формы метода динамического программирования стало возможным создание оптимизирующего цифро-аналогового устройства ЦАУ, обладающего общеизвестными преимуществами комбинированной вычислительной техники и способного работать в реальном масштабе времени.

3. Эффективность применения цифро-аналоговой системы в задачах динамического программирования обусловлена наличием возможности выбора наиболее выгодного приема для решения уравнения (15) из числа существующих методов решения дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Динамическое программирование, Издательство ИЛ, Москва, 1960.

2. Бойчук Л. М., Оптимальные системы автоматического регулирования, Издательство «Наукова думка», Киев, 1965.

3. Робертс С., Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления, Издательство, «Мир», Москва, 1965.