

УДК 517.5

Интерполяция отображений со значениями в полулинейном пространстве

В. Ф. Бабенко*, М. В. Полищук**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: polishchuk.mariya@gmail.com

Одержані узагальнення деяких відомих результатів про точні значення похибок кусково-лінійного інтерполювання класів відображень $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ для класів багатозначних відображень, які задаються опуклим зверху модулем неперервності.

Ключові слова: багатозначні відображення, інтерполяція, похибка, оптимізація.

Получены обобщения некоторых известных результатов о точных значениях погрешности кусочно-линейного интерполирования классов отображений $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ для классов многозначных отображений, которые определяются заданным выпуклым вверх модулем непрерывности.

Ключевые слова: многозначное отображение, интерполяция, погрешность, оптимизация.

Several known results about exact errors of piecewise linear interpolation of maps from $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ class are generalized to classes of set-valued mappings with given convex majorant of moduli of continuity.

Key words: set-valued maps, interpolation, interpolation error, optimization.

1. Введение

Теория многозначных отображений – интенсивно развиваемая в последние годы область математики. Она находит многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, теории оптимального управления, выпуклом анализе, теории игр, математической экономике и других разделах современной математики. Проблемы аппроксимации многозначных отображений начали рассматриваться относительно недавно. Одной из первых в этом направлении была работа Витали [1]. Обзор дальнейших результатов можно найти в [2-4]. При этом точные результаты по аппроксимации классов многозначных отображений нам неизвестны.

В данной работе получены точные оценки погрешности кусочно-линейного интерполирования на классах многозначных функций, которые определяются заданной мажорантой модулей непрерывности. Полученные результаты обобщают известные результаты для числовых функций и функций со значениями в пространстве \mathbb{R}^m (см. работы [5-8]). При этом результаты для многозначных функций

будут получены как следствия результатов для функций со значениями в полулинейном метрическом пространстве (определение см. в следующем пункте).

Кратко опишем структуру работы. Во втором пункте приведены основные определения, обозначения, факты и примеры. В третьем пункте получены значения точной верхней грани кусочно-линейного интерполирования классов функций со значениями в полулинейном метрическом пространстве, которые определяются заданой мажорантой модулей непрерывности; также рассмотрен вопрос об оптимизации кусочно-линейного интерполирования.

2. Основные обозначения и примеры

Пусть X – полулинейное метрическое пространство, то есть множество, в котором определены операции сложения элементов и умножения их на действительное число, и при этом выполняются следующие аксиомы [9]:

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x;$
2. $\forall x, y, z \in X \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$
3. $\forall x \in X \quad x + \theta = x,$ где θ – нуль пространства X ;
4. $\forall x, y \in X \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
5. $\forall x \in X \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x;$
6. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x;$
7. $\forall x \in X, \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$

Важным примером полулинейного пространства является пространство $K(\mathbb{R}^m)$ всех компактных и выпуклых подмножеств пространства \mathbb{R}^m [10].

При этом, линейная комбинация множеств $A, B \subset K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом:

$$\lambda A + \mu B = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Будем также предполагать, что заданная в X метрика $d(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall x, y \in X \quad d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y) \quad (2.1)$$

$$\forall x, y, z, w \in X \quad d(x + y, z + w) \leq d(x, z) + d(y, w). \quad (2.2)$$

Отметим, что именно свойства (2.1)–(2.2), особенно (2.2), играют ключевую роль при получении оценок аппроксимации.

Важную роль в различных областях математики (дискретная геометрия, теория многозначных отображений, теория аппроксимации...) играют следующие метрики в пространстве $K(\mathbb{R}^m)$: метрика Хаусдорфа, метрика Иглстона(и ряд ее

обобщений), L_p -метрики, определяемые с помощью опорных функций выпуклых множеств, см., например, [10]. Они обладают отмеченными выше свойствами (2.1)-(2.2). Рассмотрим их подробнее.

Если $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

Пусть $d(a, B) = \inf_{b \in B} \|a - b\|$ – расстояние от точки a до множества B , $d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$ – расстояние от множества A до множества B .

Метрика Хаусдорфа в пространстве $K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом. Если $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}$. Доказательство выполнения (2.2) для d_H можно найти в [11].

Метрика Иглстона определяется так. Если $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d_E(A, B) := d(A, B) + d(B, A)$.

Пусть теперь задана произвольная функция $\Psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами: $\Psi(0, 0) = 0$; $\Psi(u_1, u_2)$ монотонно возрастает по каждой переменной; $\Psi(\alpha u_1, \alpha u_2) = \alpha \Psi(u_1, u_2)$, $\alpha \geq 0$; $\Psi(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \leq \Psi(u_1, u_2) + \Psi(v_1, v_2)$.

Метрика d^Ψ определяется так: если $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d^\Psi(A, B) := \Psi(d(A, B), d(B, A))$.

Частными случаями метрики d^Ψ являются метрика Иглстона, когда $\Psi(u_1, u_2) = u_1 + u_2$, и метрика Хаусдорфа, когда $\Psi(u_1, u_2) = \max\{u_1, u_2\}$.

Покажем, что (2.2) справедливо для метрики d^Ψ . Для этого нам понадобится опорная функция $h_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ множества A :

$$h_A(l) = \max_{a \in A} \langle l, a \rangle, l \in \mathbb{R}^m,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^m .

Как известно [12]

$$h_{A+B}(l) = h_A(l) + h_B(l). \quad (2.3)$$

Учитывая теорему двойственности для наилучшего приближения выпуклым множеством [13,28], величину можно представить в виде:

$$d(A, B) = \sup_{\|y\| \leq 1, y \in \mathbb{R}^m} (h_A(y) - h_B(y)).$$

Далее, с учетом (2.3), получаем

$$\begin{aligned} d(A+B, C+D) &= \sup_{\|y\| \leq 1} (h_{A+B}(y) - h_{C+D}(y)) = \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} (h_A(y) - h_C(y) + h_B(y) - h_D(y)) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\|y\| \leq 1} (h_A(y) - h_C(y)) + \sup_{\|y\| \leq 1} (h_B(y) - h_D(y)) = d(A, C) + d(B, D).$$

Ввиду свойств функции Ψ теперь имеем:

$$\begin{aligned} d^\Psi(A + B, C + D) &= \Psi(d(A + B, C + D), d(C + D, A + B)) \leq \\ &\leq \Psi(d(A, C) + d(B, D), d(C, A) + d(D, B)) \leq \\ &\leq \Psi(d(A, C), d(C, A)) + \Psi(d(B, D), d(D, B)) = d^\Psi(A, C) + d^\Psi(B, D). \end{aligned}$$

По индукции легко показать, что $\forall A_i, B_i \in K(\mathbb{R}^m)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$d^\Psi\left(\sum_{i=1}^k A_i, \sum_{j=1}^k B_j\right) \leq \sum_{i=1}^k d^\Psi(A_i, B_j).$$

Наконец L_p метрика в $K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом. Если $A, B \in K(\mathbb{R}^m)$, то

$$d_p(A, B) = \left(\int_{S^{m-1}} |h_A(u) - h_B(u)|^p du \right)^{1/p},$$

где $p \geq 1$ и S^{m-1} – единичная сфера в \mathbb{R}^m .

Метрика d_p тоже обладает нужным свойством (2.2), что легко проверить с помощью определения и элементарных свойств опорных функций.

3. Кусочно-линейная интерполяция отображений со значениями в полулинейном пространстве

Пусть P – компактный n -мерный полиэдр в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , T – некоторое его симплицальное разбиение. Всякому отображению $f : P \rightarrow X$ поставим в соответствие кусочно-линейное отображение $l_T(f) : P \rightarrow X$ такое, что $l_T(f)|_{T^0} = f|_{T^0}$, где T^0 – множество вершин разбиения T .

Пусть $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Через H_P^ω будем обозначать класс отображений $f : P \rightarrow X$ таких, что

$$\forall x, y \in P \quad d(f(x), f(y)) \leq \omega(\|x - y\|). \quad (3.1)$$

Положим

$$E_T(H_P^\omega) = \sup_{f \in H_P^\omega} \max_{x \in P} d(f(x), l_T(f, x)).$$

Радиус покрытия $r(S)$ симплекса S есть по определению наименьшее такое число r , что шары радиуса r с центрами в вершинах S покрывают симплекс S . Пусть $r(T) = \max_{S \in T} r(S)$.

Следующая теорема 1 для отображений $f : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ в случае, когда $n = m = 1$, была доказана В.Н. Малоземовым [7], когда $n = 2$, $m = 1$ – В.Ф. Бабенко и А.А. Лигуном [8], а когда $m, n \in \mathbb{N}$ – В.Ф. Бабенко [5].

Теорема 1. Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то имеет место следующее утверждение

$$\sup_{f \in H_P^\omega} \max_{x \in P} |f(x) - l(f, x)| = \omega(r(T)).$$

Следующая теорема 2 дает погрешность при интерполяции отображений $f : P \rightarrow X$ кусочно-линейными.

Теорема 2. Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то справедливо

$$E_T(H_P^\omega) = \omega(r(T)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный симплекс $S \in T$ с вершинами x_0, x_1, \dots, x_t , $t \leq n$. Если $x \in S$ и $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_t(x)$ – барицентрические координаты точки x относительно точек x_0, x_1, \dots, x_t , тогда $l(f, x) = \sum_{i=0}^t \lambda_i(x) f(x_i)$ и $\sum_{i=0}^t \lambda_i(x) = 1$.

Используя (2.1)-(2.2) и (3.1), получим:

$$\begin{aligned} d(f(x), l(f, x)) &= d\left(\sum_{i=0}^t \lambda_i(x) f(x), \sum_{i=0}^t \lambda_i(x) f(x_i)\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^t d(\lambda_i(x) f(x), \lambda_i(x) f(x_i)) = \sum_{i=0}^t \lambda_i(x) d(f(x), f(x_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^t \lambda_i(x) \omega(\|x - x_i\|) = \sum_{i=0}^t \lambda_i(x) \omega\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - x_i^j)^2}\right). \end{aligned}$$

Так как $\omega(y)$ и \sqrt{y} – выпуклые вверх функции и $\sum_{i=0}^t \lambda_i(x) = 1$, $\lambda_i(x) \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, t$), то, используя неравенство Йенсена, получим:

$$d(f(x), l(f, x)) \leq \omega\left(\sqrt{\sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^n \lambda_i(x) (x^j - x_i^j)^2}\right).$$

Обозначим для $x \in S$

$$F_S(x) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=1}^n \lambda_i(x) (x^j - x_i^j)^2$$

и определим функцию $F(x)$ на P так: $F(x) = F_S(x)$, если $x \in S$.

В [5] показано, что $\max_{x \in P} F(x) = F(\bar{x})$, где \bar{x} – центр описанного около некоторого симплекса $\bar{S} \in T$ t -мерного шара, и $\max_{x \in P} F(x) \leq (r(T))^2$. Тогда

$$d(f(x), l(f, x)) \leq \omega \left(\sqrt{\max_{x \in P} F(x)} \right) = \omega(r(T)).$$

Получим теперь оценку снизу для $E_T(H_P^\omega)$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $f_0^1 : P \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$f_0^1(x) = \begin{cases} \omega(r(T) - \|x - \bar{x}\|), & \|x - \bar{x}\| \leq r(T), \\ 0, & \|x - \bar{x}\| > r(T), \end{cases}$$

Пусть $a \in X$, $d(a, \theta) = 1$. Тогда $af_0^1 : P \rightarrow X$ и $af_0^1 \in H_P^\omega$:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_P^\omega} \max_{x \in \bar{S}} d(f(x), l(f, x)) &\geq \max_{x \in \bar{S}} d(af_0^1(x), l(af_0^1, x)) = \max_{x \in \bar{S}} d(af_0^1, \theta) = \\ &= d(a, \theta) \max_{x \in \bar{S}} f_0^1(x) = \max_{x \in \bar{S}} f_0^1(x) = f_0^1(\bar{x}) = \omega(r(T)). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Пусть Λ – решетка в пространстве \mathbb{R}^n . Фундаментальный параллелепипед решетки Λ будем обозначать $D(\Lambda)$. Если число R такое, что система шаров радиуса R с центрами в точках решетки Λ образует покрытие пространства \mathbb{R}^n и шары меньшего, чем R , радиуса не удовлетворяют этому условию, то R называется радиусом покрытия решетки Λ . Радиус покрытия решетки мы будем обозначать $R(\Lambda)$.

Отношение $\theta(\Lambda)$ объема шара радиуса $R(\Lambda)$ к объему $D(\Lambda)$ называется плотностью соответствующего решетке Λ покрытия. Для плотности наиболее экономного решетчатого покрытия пространства \mathbb{R}^n равными шарами будем использовать обозначение $\theta_n = \inf_{\Lambda} \theta(\Lambda)$.

Пусть T – фиксированное клеточное разбиение компактного n -мерного полиэдра P , M – множество всевозможных граней (собственных и не собственных) клеток вида $x + D(\Lambda_h)$, $x \in \Lambda_h$, где $\Lambda_h = \left(h / \text{mes} D(\Lambda)^{1/n} \right) \Lambda$, h – положительное действительное число. Клеточное разбиение K полиэдра P определим как совокупность всевозможных клеток вида $s \cap t$, $s \in T$, $t \in M$. Разбиение K измельчим до симплицеального без добавления новых вершин, полученное симплицеальное разбиение обозначим $T(\Lambda_h)$.

Положим

$$E_{\Lambda_h}(H_P^\omega) = \inf E_{T(\Lambda_h)}(H_P^\omega),$$

где \inf берется по всевозможным не добавляющим вершин измельчениям разбиения K до симплицеального разбиения;

$$E_h(H_P^\omega) = \inf_{\Lambda} E_{\Lambda_h}(H_P^\omega),$$

$$h_p(\Lambda) = r_p \left(\theta(\Lambda) \pi^{-n/2} \Gamma(1 + n/2) \right)^{-1/n},$$

$$h_p = r_p \left(\theta_n \pi^{-n/2} \Gamma(1 + n/2) \right)^{-1/n},$$

где r_p – наибольшее r такое, что существует шар радиуса r , содержащийся в P и пустой от вершин разбиения T .

Следующая теорема 3 есть следствием теоремы 2 об оптимизации кусочно-линейного интерполирования, доказанной в [5], и теоремы 2, доказанной выше.

Теорема 3. *Если $h \leq h_p(\Lambda)/3$, то*

$$E_{\Lambda_h}(H_P^\omega) = \omega \left(h \left(\theta(\Lambda) \pi^{-n/2} \Gamma(1 + n/2) \right)^{1/n} \right);$$

если $h \leq h_p/3$, то

$$E_h(H_P^\omega) = \omega \left(h \left(\theta_n \pi^{-n/2} \Gamma(1 + n/2) \right)^{1/n} \right).$$

Пусть T_0 – некоторое симплициальное разбиение P ; $mesP$ – n -мерная мера полиэдра P ; Δ_k – допустимый набор k точек из P , то есть такой, что существует симплициальное разбиение полиэдра P с вершинами в точках из Δ_k и только в них. Через $\tau(\Delta_k)$ обозначим множество всех симплициальных разбиений полиэдра P с вершинами в точках из Δ_k .

Следующая теорема 4 есть следствием теоремы 2 об асимптотическом поведении оптимальной погрешности кусочно-линейного интерполирования, доказанной в [6], и теоремы 2, доказанной выше.

Теорема 4. *Если P – компактный полиэдр в \mathbb{R}^n , то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{\Delta_k} \inf_{T_0 \in \tau(\Delta_k)} E_{T_0}(H_P^\omega) \right) / \omega \left(\sqrt[n]{\frac{1}{k} \left(\frac{\theta_n \cdot mesP \cdot \Gamma(1 + n/2)}{\pi^{n/2}} \right)} \right) = 1.$$

где \inf_{Δ_k} берётся по всем допустимым наборам Δ_k , содержащим $\leq k$ точек.

Библиографические ссылки

1. Vitale R. A. Approximations of convex set-valued functions // R.A. Vitale // J. Approxim. Theory, 1979. — 26 — P. 301–316.
2. Zri Artstein Piecewise linear approximations of set-valued maps // Ibid, 1989. — 56. — P. 41–47.
3. Nira Dyn, Elza Farkhi, Alona Mokhov Approximations of Set-Valued Functions by Metric Linear Operators // Constructive Approximation, 2006. — Vol. 25. — P. 193–209.
4. Nira Dyn, Elza Farkhi Approximations of set-valued functions with compact images – an overview, approximation and probability // Banach Center Publ., 2006. — Vol. 72. — P. 1–14.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

5. *Бабенко В. Ф.* Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными / В. Ф. Бабенко // Математ. заметки, 1978. — Т. 24, № 1. — С. 43–50.
6. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном кусочно-линейном интерполировании непрерывных отображений / В. Ф. Бабенко // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, 1980. — С. 3–7.
7. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных / В. Н. Малоземов // Весник ЛГУ, 1966. — Т. 7 — С. 150–153.
8. *Бабенко В. Ф.* Об интерполяции многогранными функциями / В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун // Математ. заметки, 1975. — Т. 18, № 6. — С. 803–814.
9. *Борисович Ю. Г.* Многозначные отображения // Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1982. — 19.—С. 127-230.
10. *Gruber P. M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. Handbook of convex Geometry // P. M. Gruber and J. M. Wills, 1993. —P. 319-345.
11. *G. Baley Price* The theory of integration // Trans. Amer. Math. Soc., 1940. — Vol. 47 — P. 1–50.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. Пер. с англ / Р. Рокафеллар // М.: Мир, 1973. — С. 472.
13. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук // М.: Наука, 1976. —С. 320.

Надійшла до редколегії 01.09.2013