на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$,

$$f(x)-RHS_3^*(f,x)=\frac{1}{120}u^2 t h_{i+1/2}^5 f_{i+1/2}^{(5)}+O(h_{i+1/2}^6).$$

Справедливо также следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 3.

Теорема 5. Пусть

$$\bar{P}_{i+1/2}=\frac{(f'_{i+1}-f'_i)h_{i+1/2}}{2(f_i-2f_{i+1/2}+f_{i+1})}-2$$

и сплайн $\overline{RHS_3^*}(f,x)$ – сплайн вида (10) при $P_{i+1/2}=g_{i+1/2}=\bar{P}_{i+1/2}$. Тогда

$$\overline{RHS_3^*}(f,x_i)=f^{(\nu)}(x_i),\ i=\overline{0,n},\ \nu=0,1,$$

$$\overline{RHS_3^*}(f,x_{i+1/2})=f(x_{i+1/2}),\ i=\overline{0,n-1},$$

и сплайн $\overline{RHS_3^*}(f,x)$ является асимптотически наилучшим (в том же смысле, что и сплайн в теореме 4) среди всех сплайнов вида (10) при $P_{i+1/2}=g_{i+1/2}$ и при этом для любой функции $f(x)\in L_\infty^5[x_i,x_{i+1}]$ справедливо соотношение

$$f(x)-\overline{RHS_3}^*(f,x)\,u^2 t h_{i+1/2}^5 f_{i+1/2}^{(5)}+O(h_{i+1/2}^6).$$

1. Мирошниченко В.Л. Приближение функций сплайнами // Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, 86). Новосибирск, 1981.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.

УДК 517.5

В.П.Моторный, А.О.Куш

О НАИЛУЧШЕЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ВИДА $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ НА КЛАССЕ W^2H^ω

Пусть W^2H^ω - класс 2π -периодических функций, 2-я производная которых удовлетворяет неравенству $|f^{(2)}(x)-f^{(2)}(y)|\le$

$\leq \omega(|x-y|)$, где $\omega(t)$ –заданный модуль непрерывности. Для нечётных r и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ в работе [I] доказано, что наилучшей квадратурной формулой на классе $W^r H^\omega$ является формула прямоугольников $\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$.

В доказательстве используется метод $\sum$ –перестановок, введенный Н.П.Корнейчуком. Однако метод $\sum$ –перестановок перестаёт работать в случае, когда экстремальная функция, на которой достигается

$$\sup_{f\in H}\left|\int_0^{2\pi} f(x)dx-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=}^{n-1} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right|,$$

не обладает некоторыми простыми свойствами симметрии. Так, например, будет для класса $H=W^{2r}H^\omega$ (ω –выпуклый модуль непрерывности).

Совершенствуя метод $\sum$ –перестановок, доказываем, что формула прямоугольников является оптимальной на классе W^2H^ω (ω –выпуклый модуль непрерывности). Для этого рассмотрим неотрицательную $2\pi/n$ – периодическую функцию $f_{n,2}(x)$, обращающуюся в нуль в нуле и такую, что

$$\sup_{f\in W^2H^\omega}\left|\int_0^{2\pi} f(x)\,dx-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right|=\int_0^{2\pi} f_{n,2}(x)\,dx .$$

Из работ [2 - 4] следует, что $f^{(2)}_{n,2}(x)$ – чётная на отрезке $[0,\pi/n]$ имеет вид $f^{(2)}_{n,2}(x)=u(x)\cdot\gamma$, где

$$u(x)=\begin{cases}\int_x^c \omega'(\rho(t)-t)\,dt, & x\in[0,c],\\ -\int_c^x \omega'(t-\bar\rho(t))\,dt, & x\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right],\end{cases}$$

c –точка минимума функции

$$D_n^3(x)=D_3(nx)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin knx}{k^3} .$$

Функция $\rho(t)$ при $t\in[0,c]$ определяется равенством $D_n^3(t)=D_n^3(\rho(t))$, $\rho(t)\in[c,\pi/n]$. Функция $\bar\rho(t)$ – обратная к функции $\rho(t)$, γ – некоторая постоянная.

Пусть t_0 – нуль функции $f^{(2)}_{n,2}(x)$ на интервале $(0,\pi/n)$.

Положим $\Psi(t)=f^{(2)}_{n,2}(x+t_0)$ для $x\in\left[-t_0,\frac{\pi}{n}-t_0\right]$, $\Psi(t)=f^{(2)}_{n,2}(0)$

для $x < t_0$ и $\psi(t) = f^{(2)}_{n,2}(\pi/n)$ для $x > \frac{\pi}{n} - t_0$. Для заданной системы точек $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_1 + 2\pi$, следуя работе [I], построим 2π -перидическую функцию $f_\xi(t)$, определённую на отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ следующим образом:

$$f_\xi(t) = \begin{cases} \min\{\psi(-t+\xi_i), \psi(t-\xi_{i+1})\}, & \text{если } i \text{ нечётно} \\ \max\{\psi(-t+\xi_{i+1}), \psi(t-\xi_i)\}, & \text{если } i \text{ чётно}. \end{cases} \tag{I}$$

Очевидно, что $f_\xi(t) \in H^\omega$. Обозначим через M_n множество функций вида (I), в среднем равных нулю. Множество M_n непусто, например, $f^{(2)}_{n,2} \in M_n$. Через M_n^r $(r=1,2)$ обозначим множество r-х периодических интегралов со средним значением, равным нулю на $[0, 2\pi]$, а через $\|h\|$ - норму функции h в пространстве $L[0,2\pi]$. Для функции $f \in M_n^r$ положим

$$C_k = C_k(f) = \|f^{(r-k)}\| / \|f^{(2-k)}_{n,2}\|, \quad k=0,1;\ r=1,2.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма I. Для любой функции $f(t) \in M_n^1$ $(f'(t) \neq f^{(2)}_{n,2}(t+\alpha))$ выполняется неравенство $\|f'\| > \|f^{(2)}_{n,2}\|$, т.е. $C_0(f) > 1$.

Доказательство. Пусть $A = \{x \in [\xi_1, \xi_1+2\pi] : f'(x) > 0\}$, $A_0 = \{x \in [0,2\pi] : f^{(2)}_{n,2}(x) > 0$. Будем считать, что $\mu A > \mu A_0$ (в противном случае следует рассмотреть множества, на которых функции отрицательны). Легко получить неравенство:

$$\int_A f'(t)\,dt > \int_{A_0} f^{(2)}_{n,2}(t)\,dt,$$

из которого следует лемма I.

Лемма 2. Для любой функции $f(t) \in M_n^1$ $(f'(t) \neq f^{(2)}_{n,2}(t+\alpha))$ выполняется неравенство $\|f\| > C_0 \|f'_{n,2}\|$.

Доказательство. Так как на $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ функция $f(x)$ монотонна, то

$$\|f\| \geq \sum_{\nu=1}^{2n} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |f(t) - \alpha_\nu|\,dt, \quad (x_{2n+1} = x_1 + 2\pi),$$

где α_ν - констан а наил іше о приближения функции f в метрике L на отрезке $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Поэтому достаточно показать, что

$$\| \tilde{f} \| > C_0 \| f'_{n,2} \|, \qquad (2)$$

где $\tilde{f} = f - \alpha_\nu$ на интервале $(x_\nu, x_{\nu+1})$. В силу симметричности графика функции f' на $(x_\nu, x_{\nu+1})$ относительно прямой $x = \frac{1}{2}(x_{\nu+1} + x_\nu)$ график функции $\tilde{f}$ симметричен на $(x_\nu, x_{\nu+1})$ относительно точки $x = \frac{1}{2}(x_{\nu+1} + x_\nu)$. Чтобы доказать неравенство (2), строим интегралы от функций $|\tilde{f}|$ и $|f'_{n,2}|$ по множествам, на которых либо $\tilde{f}' > 0$ и $f^{(2)}_{n,2} > 0$, либо $\tilde{f}' < 0$ и $f^{(2)}_{n,2} < 0$. Пусть $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} (x_{2\nu-1}, x_{2\nu})$, $A_0 = \bigcup_{\nu=1}^{n} (x^0_{2\nu-1}, x^0_{2\nu})$ - множества, на которых $\tilde{f}' > 0$ и $f^{(2)}_{n,2} > 0$.
Определим функцию

$$h_\nu(x) = h_\nu(\tilde{f}, x) = \begin{cases} -\tilde{f}(x + x_{2\nu-1}), & x \in [0, \frac{1}{2}(x_{2\nu-1} + x_{2\nu})], \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{2}(x_{2\nu-1} + x_{2\nu})], \end{cases}$$

$$h_0(x) = h_\nu(f'_{n,2}, x).$$

Тогда

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} h'_\nu(x)\right| = \sum_{x_{2\nu} - x_{2\nu-1} \geq 2x} |f'(x_{2\nu-1} + x)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |f'(x^0_{2\nu-1} + x)| =$$

$$= n|h'_0(x)| < C_0 n |h'_0(x)|. \qquad (3)$$

Неравенство (3) - строгое на множестве положительной меры $2t_0 - \min_\nu |x_{2\nu-1} - x_{2\nu}|$. Кроме того,

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(0) = \frac{1}{4} \bigvee_0^{2\pi} [f] = \frac{1}{4} C_0 \bigvee_0^{2\pi} [f'_{n,2}] = C_0 n h_0(0).$$

Поэтому для любого $x \in [0, t_0]$, учитывая (3), имеем

$$\sum_{n=1}^{\nu} h_\nu(x) > C_0 n h_0(x).$$

Это неравенство означает, что

$$\int_A |\tilde{f}(t)| dt > C_0 \int_{A_0} |f'_{n,2}(t)| dt.$$

Аналогичное неравенство имеет место для интегралов от $|\tilde{f}(t)|$ и $|f'_{n,2}(t)|$ по множествам, где $\tilde{f}' < 0$ и $f^{(2)}_{n,2} < 0$. Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi(f,x)$ - $\sum$ -перестановку функции (см. [5. С. 132-149]). Имеет место лемма.

Лемма 3. Пусть $f \in M_n^1$. Тогда для любого x выполняется неравенство

$$\int_0^x \Phi(f,t)\,dt \le c_1 \int_0^x \Phi(f'_{n,2},t)\,dt, \qquad (4)$$

где $c_1 = \|f\| / \|f'_{n,2}\|$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(f,x) = \sum_{k=1}^{2n} \bar{\varphi}_i(x), \quad \Phi(f'_{n,2},x) = 2n\,\bar{\varphi}_0(x).$$

Если $\mu(\operatorname{supp}\varphi_i) \ge \frac{\pi}{n}$, то $\frac{d}{dt}\bar{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\bar{\varphi}_0(t)$ для $t \in [0, \frac{\pi}{n}]$.

Если же $\mu(\operatorname{supp}\varphi_i) = \alpha \frac{\pi}{n}$, то

$$\frac{d}{dt}\bar{\varphi}_i(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{\varphi}_0(t), & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t > \alpha. \end{cases}$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что

$$\Phi(f,0) < c_1 \Phi(f'_{n,2},0) \qquad (5)$$

и для любого $x \in [0, \frac{\pi}{n}]$

$$|\Phi'(f,x)| < c_1 |\Phi'(f'_{n,2},x)|. \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) получаем (4).

Пусть функция $f_x \in M_n^2$ принимает равные минимальные значения в заданной системе узлов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. (Такая функция f существует в силу теоремы 3.1 из [1].) Положим

$$g_x = f_x - \min f_x, \quad g_2 = f_{n,2} - \min f_{n,2}.$$

Лемма 4. Для любой системы узлов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $(x_k \ne \frac{2\pi k}{n} + \mathrm{const})$ имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} g_x(t)\,dt > \int_0^{2\pi} g_2(t)\,dt.$$

Из леммы 4 сразу следует теорема.

Теорема. Формула прямоугольников является оптимальной на классе $W^2 H^\omega$ среди всех квадратурных формул вида

Библиографические ссылки

I. Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций //Изв. АН ССР. Сер. Математика. 1974. Т. 38, № 3.
2. Малоземов В.Н. О точности квадратурной формулы прямоугольников для периодических функций // Мат. заметки. 1967. Т.2. № 4.
3. Малоземов В.Н. Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций// Вестник Ленингр. ун-та. 1967. № I.
4. Корнейчук Н.П. Об экстремальных свойствах периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. А, № 8.
5. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М., 1976.

УДК 517. 5

Т.В.Наконечная, Т.А.Гранкина

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ

Обозначим через $W^r H^\omega [-\pi,\pi]$ $(r=0,1,\dots, W^0 H_\omega = H_\omega)$ множество непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$ таких, что $\omega(f^{(r)},x) \le \omega(x)$ $(0 \le x \le \pi,\ f^{(0)}=f)$, где $\omega(x)$ - заданный модуль непрерывности. Пусть $x_k = k\pi/n = kh$ $(k=0,\pm1,\dots,\pm n)$. 2π -периодическую функцию $S_2(f,x)$ назовём интерполяционным сплайном порядка 2, если на каждом промежутке $\left(x_k - \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}\right)$ она является полиномом Лагранжа второй степени, интерполирующим функцию $f(x)$ в точках x_{k-1}, x_k, x_{k+1} (в точках разрыва положим $f(x)=\left(f(x+0)+f(x-0)\right)/2$).

Теорема. Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности имеют место равенства

$$\sup_{f\in H_\omega[-\pi,\pi]} \|f-S_2(f)\|_\infty = \omega\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{8}\omega(h); \tag{I}$$

$$\sup_{f\in W^1 H_\omega[-\pi,\pi]} \|f-S_2(f)\|_\infty = \frac{65}{192}\int_0^{4h/5}\omega(t)\,dt+\frac{5}{48}\int_{4h/5}^{6h/5}\omega(t)\,dt. \tag{2}$$

Общая идея рассуждений, приведенных в данной теореме, принад-