УДК 517.5

О приближении непрерывных периодических функций полиномами Стечкина

О.В. Котова

Донецкий национальный университет,
Донецк 83001. *E-mail: butkot83@mail.ru*

Отримана вiдповiдь на питання В.I. Iванова про точний порядок наближення полiномами Стечкiна при $s = 3$ та $s = 4$ (s — це порядок модуля гладкостi). Використовується метод мультиплiкаторiв рядiв Фур'є та спецiальнi рiзнiснi оператори. Випадок $s = 2$ дослiджено ранiше.

Ключовi слова: **модуль гладкостi, K-функцiонал, сплайн, теорема Фур'є-Бюдана, мультиплiкатор Фур'є , перетворення Фур'є мiри, теорема Берлiнга.**

Получен ответ на вопрос В.И. Иванова о точном порядке приближения полиномами Стечкина при $s = 3$ и $s = 4$ (s — это порядок модуля гладкости). Используется метод мультипликаторов рядов Фурье и специальные разностные операторы. Случай $s = 2$ исследован ранее.

Ключевые слова: **модуль гладкости, K-функционал, сплайн, теорема Фурье-Бюдана, мультипликатор Фурье, преобразование Фурье меры, теорема Берлинга.**

The answer to the V.I. Ivanov's question about the exact order approximation by Stechkin's polynomials where $s = 3$ and $s = 4$ is obtained (s — is the order of the modulus of smoothness). We use the method of Fourier multipliers and special differencing operators. The case where $s = 2$ was studied previously.

Key words: **modulus of smoothness, K-functional, spline, Fourier-Budan's theorem, Fourier multiplier, Fourier transform of measure, Beurling's theorem.**

1. Введение

Порядок приближения непрерывной 2π-периодической функции (будем писать: $f \in C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$) тригонометрическими полиномами порядка n при росте n часто выражают через модуль гладкости $\omega_s(f; \frac{\pi}{n})$, который определяется следующим образом ($\| \cdot \|$ – норма в $C(\mathbb{T})$):

$$\omega_s(f; h) = \sup_{0<\delta\leq h} \|\Delta^s_\delta f(\cdot)\|, \quad \Delta^1_\delta f(x) = f(x) - f(x + \delta)$$

В теории приближений часто используют полиномы вида

$$\tau_{r,n}(f) = \tau_{r,n}(f; x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) D^r_n(t) dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad \alpha_{r,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^r(t)dt$$

($r \in \mathbb{N}$, порядок $\tau_{r,n}$ равен rn). Чтобы порядок $\tau_{r,n}$ был не выше n, нужно n заменить на $\left[\frac{n}{r}\right]$.

Как доказано в [9], при $r \geq 3$

$$\|f - \tau_{r,n}(f)\| \asymp \omega_2\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big)$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r). Такие двойные (порядковые) неравенства с правой частью вида $\omega(f; \frac{\pi}{n})$ и $\omega_2(f; \frac{\pi}{n})$ доказаны в [9] для сверток функций с ядрами довольно общего вида.

Оценки приближения сверху называют прямыми теоремами, а такие же оценки снизу, которые появились в работах Р.М. Тригуба еще в 60-е годы прошлого века, сейчас называют «strong converse theorem» (см., например, [1] и библиографию там же).

Пример [10, 8.2.5, с.362-363]. Если при четном s $\varphi_s(x) = (1-|x|^s)_+$, а при нечетном s $\varphi_s(x) = (1-|x|^{s+1})_+ + i|x|^s(1-|x|)_+ sign\ x$, то

$$\Big\|f - \sum_k \varphi_s\Big(\frac{k}{n}\Big)\hat{f}_k e_k\Big\| \asymp \omega_s\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big).$$

Здесь $e_k = e^{ikx}$, а $\hat{f}_k$ — коэффициент Фурье.

Аналогичные двойные неравенства получены и для специальных модулей гладкости $\tilde{\omega}_s$ нецелого порядка s (см. [10, 8.3.1].

С.Б. Стечкин [8] построил полиномы с порядком приближения не хуже $\omega_s(f; \frac{\pi}{n})$ при любом целом $s \geq 3$ и $r \geq s+2$:

$$\tilde{\tau}_{s,r,n}(f;x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=1}^{s}(-1)^{\nu+1}\binom{s}{\nu}f(x+\nu t)D_n^r(t)dt, \quad \tilde{\tau}_{s,r,n}(1;x) \equiv 1.$$

На конференции в Москве (2010) профессор В.И. Иванов поставил задачу доказать справедливость подобных порядковых неравенств в случае приближения периодических функций полиномами $\tilde{\tau}_{s,r,n}$ (раздел «Видеотека» портала Math-Net.Ru, см. также [2]).

Наша цель: найти точный порядок приближения периодических функций такими полиномами. Отличие этих полиномов от других в том, что не только констан-ты являются неподвижными точками операторов $\tilde{\tau}_{s,r,n}$.

Положительные константы абсолютные будем обозначать буквой c, а зависящие лишь от r — $\gamma(r)$ (с индексами).

Теорема 1. *Для любых натуральных* $s \geq 2$, *четных* $r \geq s+4$ *и* $s_1 = s + \frac{1}{2}\big(1 + (-1)^{s+1}\big)$ *существует величина* $\gamma_0(r)$ *такая, что при* $n \geq \frac{r}{\gamma_0(r)} + 1$ *и* $N = [\frac{\gamma_0(r)}{r} n]$ *(целая часть) для любой функции* $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|f - \widetilde{\tau}_{s,r,N}(f)\| + \|f - \widetilde{\tau}_{s,r,n}(f)\| \asymp \omega_{s_1}\Big(f; \frac{1}{n}\Big)$$

(двусторонние неравенства с константами, зависящими лишь от r).

Полиномы $\tilde{\tau}_{s,r,n}$ можно представить в виде ($\varphi_n(x) = 0$ при $|x| \geq r + \frac{1}{n}$)

$$\tilde{\tau}_{s,r,n}(f) = \sum \varphi_n\Big(\frac{|k|}{n}\Big)\hat{f}_k e_k, \qquad e_k = e_k(x) = e^{ikx}, \qquad \varphi_n(0) = 1,$$

а $\hat{f}_k$ — коэффициенты Фурье f.

Ранее подобный теореме 1 результат получен при функции-множителе φ_n, не зависящей от n [3, теорема 1.2]. Для оценки приближения снизу оставить одно из двух слагаемых нельзя. В этом случае нужно вводить специальный модуль гладкости (разностный оператор).

Положим (это усредненная первая разность, связанная с точкой $t \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$), следуя [3; 4]:

$$\Delta^1_{h,t} f(x) = \int_0^1 \big[\Delta^1_{hu} f(x) - \lambda \Delta^2_{hu} f(x)\big] du,$$

где

$$\lambda = \lambda(t) = \frac{2(it + 1 - e^{it})}{2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}}$$

(вещественная часть знаменателя $2(1-\cos t)^2 > 0$), а

$$\Delta^1_{h,0} f(x) = \int_0^1 \Delta^1_{hu} f(x) du.$$

Рассмотрим случаи $(s,r) = (3,5)$ и $(s,r) = (4,6)$ (случай $(s,r) = (2,4)$ есть в [4]).

Есть некая разница при четном и нечетном s (см. теремы 2 и 3). Как доказано ниже (см. леммы 5 и 7), четная функция $\varphi_n(x)$ равна единице при $x > 0$ и любом n лишь в одной точке x_n, когда $(s,r) = (3,5)$, и в двух точках $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$, когда $(s,r) = (4,6)$.

Теорема 2. *При* $(s,r) = (3,5)$ *и любом* $n \in \mathbb{N}$ *для любой функции* $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|f - \widetilde{\tau}_{3,5,n}(f)\| \asymp \|\Delta^2_{\frac{1}{n},0} \Delta^1_{\frac{1}{n},x_n} \Delta^1_{\frac{1}{n},-x_n} f(\cdot)\|$$

(двусторонние неравенства с положительными абсолютными константами).

Теорема 3. *При* $(s,r)=(4,6)$ *и любом* $n\in\mathbb{N}$ *для любой функции* $f\in C(\mathbb{T})$

$$\|f-\widetilde{\tau}_{4,6,n}(f)\|\asymp\|\prod_{j=1}^{2}\Delta^1_{\frac{1}{n},x_{j,n}}\Delta^1_{\frac{1}{n},-x_{j,n}}f(\cdot)\|$$

(двусторонние неравенства с положительными абсолютными константами).

Для доказательства приведенных теорем используется, как и ранее, метод мультипликаторов Фурье, основанный, в случае пространства C, на представлении некоторых функций g_n в виде

$$g_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}d\mu_n(y),$$

где μ_n – конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера при ограниченной по n полной вариации μ_n (см. [7]). В случае теоремы 3, например,

$$g_n(x)=\frac{1-\varphi_n(x)}{\psi(x,x_n)\psi(x,-x_n)},$$

где

$$\psi(x,t)=1-\lambda+(2\lambda-1)\frac{e^{ix}-1}{ix}-\lambda\frac{e^{2ix}-1}{2ix},\quad \lambda=\lambda(t)=\frac{2(it+1-e^{it})}{2it+3-4e^{it}+e^{2it}} \tag{1}$$

и нужно проверить представления g_n и $\frac{1}{g_n}$ в указанном виде.

Из этих теорем следует такие же двусторонние неравенства и по норме в $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$ (см. ниже 3) в лемме 2).

2. Доказательство теоремы 1

Как видно из определения полиномов $\tilde{\tau}_{s,r,n}$,

$$\tilde{\tau}_{s,r,n}(f)=\sum_{|k|\le rn}\lambda_{k,n}\hat{f}_k e_k,$$

$$\lambda_{k,n}=1-\frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-e^{ikt}\right)^s D_n^r(t)dt,\quad \lambda_{k,n}=\lambda_{-k,n}.$$

Для доказательства теоремы 1 положим при $|x|\le r$

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)&=1-\frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-e^{inxt}\right)^s D_n^r(t)dt=\\&=\frac{1}{\pi\alpha_{r,n}}\sum_{\nu=1}^{s}(-1)^{\nu+1}\binom{s}{\nu}\int\limits_0^{\pi}\cos\nu nxtD_n^r(t)dt.\end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $2 \le s \le r-4$ и r четное. Существует положительное число $\gamma_0 = \gamma_0(r)$ такое, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < |x| \le \gamma_0$ $\varphi_n(x) \ne 1$. Более того, при $|x| \le \gamma_0$ и четном s*

$$\gamma_1(r)x^s \le |1-\varphi_n(x)| \le \gamma_2(r)x^s; \tag{3}$$

а при нечетном s

$$\gamma_3(r)x^{s+1} \le |1-\varphi_n(x)| \le \gamma_4(r)x^{s+1}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть сначала s — четное.

Как видно из (2), $\big(1-\varphi_n(x)\big)^{(\nu)}_{x=0} = 0$ при $0 \le \nu \le s-1$, а

$$\frac{1}{s!}\varphi_n^{(s)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi_n(x) - \sum\limits_{\nu=0}^{s-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\varphi_n^{(\nu)}(0)}{x^s} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi_n(x)-1}{x^s} =$$
$$= (-1)^{\frac{s}{2}+1}n^s\frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}}\int_{-\pi}^{\pi} t^s D_n^r(t)dt$$

Поэтому, учитывая еще, что $\frac{\alpha_{r,n}}{(2n+1)^{r-1}} \in \left[\frac{1}{r}, 1\right]$ (см. [9], лемма 1),

$$\frac{(-1)^{\frac{s}{2}+1}\varphi_n^{(s)}(0)}{s!} \ge \frac{n^s}{\pi(2n+1)^{r-1}}\int\limits_0^\pi t^s\frac{\sin^r\big(n+\frac12\big)t}{\big(\sin\frac{t}{2}\big)^r}dt \ge \frac{2^r n^s}{\pi(2n+1)^{r-1}}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^r\big(n+\frac12\big)t}{t^{r-s}}dt$$

После замены в интеграле $u = \big(n+\frac12\big)t$ получаем, что при всех $n \in \mathbb{N}$ $\big|\varphi_n^{(s)}(0)\big| \ge \gamma_5(r)$.

С другой стороны, из той же формулы (2) видно, что

$$|\varphi_n^{(s)}(x)| \le \frac{1}{\pi\alpha_{r,n}}\sum_{\nu=1}^{s}\binom{s}{\nu}\nu^s n^s\int\limits_0^\pi t^s\frac{\big|\sin^r\big(n+\frac12\big)t\big|}{\sin^r\frac{t}{2}}dt,$$

а после применения еще и неравенства $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{1}{\pi}t$, $(t \in [0,\pi])$

$$|\varphi_n^{(s)}(x)| \le \frac{r\pi^{r-1}n^s}{(2n+1)^{r-1}}\gamma_6(r)\int\limits_0^\pi \frac{\sin^r\big(n+\frac12\big)t}{t^{r-s}}dt.$$

После замены $\big(n+\frac12\big)t = u$ получаем, что при всех n

$$|\varphi_n^{(s)}(x)| \le \gamma_7(r).$$

Повторяя это рассуждение при $s \le r-3$, получаем

$$|\varphi_n^{(s+1)}(x)| \le \gamma_8(r).$$

Теперь

$$\Big|\frac{1-\varphi_n(x)}{x^s}\Big| = \frac{1}{(s-1)!}\Big|\int\limits_0^1 (1-u)^{s-1}\varphi_n^{(s)}(xu)du\Big| \le \frac{\gamma_7(r)}{s!},$$

а $\big(\theta \in (0,1)\big)$

$$\left|1-\varphi_n(x)+\frac{x^s}{s!}\varphi_n^{(s)}(0)\right| = \left|\frac{x^{s+1}}{(s+1)!}\varphi_n^{(s+1)}(\theta x)\right| \le \frac{\gamma_8(r)}{(s+1)!}|x|^{s+1},$$

отсюда при $|x| \le \gamma_0(r) = \frac{\gamma_5(r)}{\gamma_8(r)}$

$$|1-\varphi_n(x)| \ge \frac{|x|^s}{s!}\big|\varphi_n^{(s)}(0)\big| - \frac{\gamma_8(r)}{(s+1)!}|x|^{s+1} \ge \frac{|x|^s}{s!}\Big(\gamma_5(r) - \frac{\gamma_8(r)}{s+1}|x|\Big) \ge \gamma_9(r)|x|^s$$

и неравенство (3) доказано.

При нечетном s применяем те же неравенства с заменой s на $s+1$ и добавлением условия $s \le r-4$.

Лемма 1 доказана.

Комплекснозначная числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ является мультипли-катором из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$, если для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \widehat{f}_k e_k \sim \Lambda f$$

является рядом Фурье некоторой функциии $\Lambda f \in C(\mathbb{T})$ и

$$\big\|\{\lambda_k\}\big\|_M = \sup_{\|f\|\le 1}\|\Lambda f\| < \infty.$$

Такие операторы перестановочны со сдвигом и являются свертками функции f с некоторыми мерами на окружности.

Аналогично определяется мультипликатор из $L_p(\mathbb{T})$ в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$ ($\{\lambda_k\} \in M_p$) и всегда $\big\|\{\lambda_k\}\big\|_{M_p} \le \big\|\{\lambda_k\}\big\|_M$ (см., например, [7, гл. I и VI]).

Лемма 2. (принцип сравнения, [7, 7.1.11]

1) *Пусть*

$$\Lambda f \sim \sum_{k\in Z}\lambda_k\widehat{f}_k e_k, \quad \widetilde{\Lambda} f \sim \sum_{k\in Z}\widetilde{\lambda}_k\widehat{f}_k e_k$$

Если из $\lambda_k = 0$ *следует, что и* $\widetilde{\lambda}_k = 0$ *(это и необходимо), то*

$$\|\widetilde{\Lambda} f\| \le K\|\Lambda f\|, \quad K = \inf_{\frac{0}{0}}\Big\|\Big\{\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\Big\}\Big\|_M$$

(нижняя грань относится к выбору дробей вида $\frac{0}{0}$*).*

2) *Если к тому же* $(I-\Lambda)$ — *компактный оператор в* $C(T)$, *где* I — *единичный оператор, то*

$$\|\widetilde{\Lambda} f\| \le K\|\Lambda f\| \tag{5}$$

для всех $f \in C(\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\inf_{\frac{0}{0}} \left\|\left\{\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right\}\right\|_M \le K$$

3) *Из условий утверждения 2) и неравенства* (5) *следует такое же неравенство по норме в* $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$.

Банахову алгебру $B(\mathbb{R})$ (относительно поточечного умножения) определяют следующим образом:

$$B(\mathbb{R}) = \Big\{g : g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} d\mu(t), \quad \|g\|_B = var\ \mu < \infty\Big\},$$

где μ – конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера, а $var\ \mu$ – ее полная вариация. Известно, что для непрерывных функций g (см. [7; 10])

$$\sup_{\varepsilon>0} \big\|\{g(\varepsilon k)\}\big\|_M = \|g\|_B.$$

Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е. $d\mu = hdx$, то получим подалгебру $A(\mathbb{R})$ абсолютно сходящихся интегралов Фурье с нормой $\|g\|_B = \|g\|_A = \|h\|_1$.

Воспользуемся достаточным условием принадлежности $A(\mathbb{R})$, указанным Берлингом. См., напр., обзорную статью [5].

Лемма 3. *Если* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *локально абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}$, g *и* $g' \in L_2(\mathbb{R})$, *то*

$$\|g\|_A \le c\big(\|g\|_2 + \|g'\|_2\big).$$

Переходим к доказательству теоремы. Пусть сначала s четное. Оценка приближения в теореме 1 сверху следует из теоремы Стечкина, приведенной в начале статьи:

$$\|f - \tilde{\tau}_{s,r,N}(f)\| + \|f - \tilde{\tau}_{s,r,n}(f)\| \le \gamma_{10}(r)\Big(\omega_s\Big(f, \frac{1}{N}\Big) + \omega_s\Big(f, \frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Осталось воспользоваться известным свойством модуля гладкости

$$\omega_s(f, \lambda h) \le (1+\lambda)^s \omega_s(f, h)$$

(см., например, [10]) при $n \ge \frac{r}{\gamma_0(r)} + 1$ и $\lambda = \frac{n}{N} \in \Big[\frac{r}{\gamma_0}, \frac{r}{\gamma_0} + \big(\frac{r}{\gamma_0}\big)^2\Big]$.

Докажем, что для любого тригонометрического полинома T_N порядка не выше N

$$\frac{1}{n^s}\|T_N^{(s)}\| \le \gamma_{11}(r)\|T_N - \tilde{\tau}_{s,r,n}(T_N)\|. \tag{6}$$

В силу леммы 2 нужно доказать, что функция

$$g_n(x) = \frac{x^s \varphi_N\big(\frac{nx}{N}\big)}{\varphi_N\big(\frac{nx}{N}\big) - \varphi_n(x)\varphi_N\big(\frac{nx}{N}\big)} = \frac{x^s}{1-\varphi_n(x)} \qquad \big(|x| \le \gamma_0\big)$$

допускает продолжение на $\mathbb{R}$ с условием $\sup\limits_n \|g_n\|_A < \infty$.

В силу леммы 1 при $|x| \le \gamma_0$ эта функция ограничена по n, как и ее производная

$$g_n' = -\frac{\big(\frac{1}{g_n}\big)'}{\big(\frac{1}{g_n}\big)^2}$$

К непрерывной функции g_n, равной нулю при $|x| \ge \gamma_0 + 1$ и линейной на $[-\gamma_0 - 1, -\gamma_0]$ и $[\gamma_0, \gamma_0+1]$, применяем лемму 2. Неравенство (6) доказано.

Хорошо известно, что в случае функционала Peetre (см., например, [10], 8.3)

$$K_s(f,h) = \inf_{g\in W^s_\infty}\{\|f-g\| + h^s\|g^{(s)}\|\} \asymp \omega_s(f,h).$$

Поэтому, используя еще (6),

$$\begin{aligned}\omega_s\Big(f,\frac{1}{n}\Big) \le \omega_s\Big(f,\frac{1}{N}\Big) \le \gamma_{12}(r)K_s\Big(f,\frac{1}{N}\Big) \le \gamma_{12}(r)\big\{\|f-\tilde{\tau}_{s,r,N}(f)\| + \frac{1}{n^s}\|\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,N}(f)\|\big\} \le \\ \le \gamma_{12}(r)\big\{\|f-\tilde{\tau}_{s,r,N}(f)\| + \|\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,N}\big(f-\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,n}(f)\big)\|\big\} \le \\ \le \gamma_{13}(r)\big\{\|f-\tilde{\tau}_{s,r,N}(f)\| + \|f-\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,n}(f)\|\big\},\end{aligned}$$

так как еще $\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,n}\big(\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,N}(f)\big) = \tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,N}\big(\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,n}(f)\big)$, а $\|\tilde{\tau}^{(s)}_{s,r,N}\| \le \gamma_{14}(r)$.

Таким же образом получаем оценку снизу $\omega_{s+1}\Big(f;\frac{1}{n}\Big)$ при нечетном s с функцией

$$g_n(x) = \frac{x^{s+1}}{1-\varphi_n(x)}.$$

А для доказательства такой же оценки сверху доказываем сравнением следующее неравенство (см. пример во введении):

$$\big\|f-\tau_{s,r,n}(f)\big\| \le \gamma_{15}(r)\big\|f-\tau_{s+1,r,n}(f)\big\|.$$

В этом случае

$$g_n(x) = \frac{1-\varphi_n(x)}{x^{s+1}}$$

и применяем (4). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.

Для доказательства теорем 2 и 3 функцию φ_n определим иначе.

$$\lambda_{k,n} = 1 - \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(1 - e^{ikt}\right)^s D_n^r(t)dt.$$

Коэфициенты D_n^r вычислены в [9] (лемма 1):

$$D_n^r(t) = e^{-irnt} \sum_{m=0}^{2rn} \beta_m e^{imt}, \quad \beta_{rn} = \alpha_{r,n},$$

при $0 \le m \le 2rn$

$$\beta_m = r \sum_{\nu=0}^{[\frac{m}{2n+1}]} (-1)^\nu \frac{(m-\nu(2n+1)+r-1)!}{\nu!(r-\nu)!(m-\nu(2n+1))!} = r \sum_{\nu=0}^{[\frac{m}{2n+1}]} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(r-\nu)!} \prod_{l=1}^{r-1} (m-\nu(2n+1)+l),$$

а при $m > 2rn \quad \beta_m = 0$.

Рассмотрим случай $(s, r) = (3, 5)$. Множители при коэффициентах Фурье $\widehat{f}_k$ у полинома $\widetilde{\tau}_{3,5,n}$ равны

$$\lambda_{k,n} = \frac{1}{2\pi\beta_{5n}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[3e^{ikt} - 3e^{2ikt} + e^{3ikt}\right] D_n^5(t)dt = \frac{1}{\beta_{5n}} (3\beta_{|k|+5n} - 3\beta_{2|k|+5n} + \beta_{3|k|+5n}).$$

Полагаем, что четная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция при $|x| \le 5$

$$\varphi_n(x) = \frac{5}{\beta_{5n}} \Big[3S_1^{\alpha_1} - 3S_2^{\alpha_2} + S_3^{\alpha_3}\Big],$$

где для $\alpha_j = \{0, 1, 2\},\ j = \{1, 2, 3\}$

$$S_j^{\alpha_j} = \sum_{\nu=0}^{\alpha_j} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(r-\nu)!} \prod_{l=1}^{r-1} (rn - j|x|n - \nu(2n+1) + l), \tag{7}$$

$\varphi_n(x) = 0$, когда $|x| \ge 5 + \frac{1}{n}$, и линейна на $\big[-5 - \frac{1}{n}, -5\big]$ и $\big[5, 5 + \frac{1}{n}\big]$, $\lambda_{k,n} = \varphi_n\Big(\frac{|k|}{n}\Big)$.

Для удобства запишем значения параметров α_j на интервалах в виде таблицы 1.

Таблица 1

	$\left[0, \frac{n+1}{3n}\right)$	$\left[\frac{n+1}{3n}, \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n}\right)$	$\left[\frac{n-1}{n}, \frac{3n+2}{3n}\right)$	$\left[\frac{3n+2}{3n}, \frac{3n+1}{2n}\right)$	$\left[\frac{3n+1}{2n}, \frac{5n+3}{3n}\right)$
α_1	2	2	2	1	1	1
α_2	2	2	1	1	1	0
α_3	2	1	1	1	0	0

На $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right)$ $S_3 = 0$ и $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$; на $\left[\frac{5n+2}{2n}, 3\right)$ $S_2 = S_3 = 0$ и $\alpha_1 = 1$; на $\left[3, 5\right)$ $S_2 = S_3 = 0$ и $\alpha_1 = 0$.

Четная функция $\Phi_n(x) = \alpha_{3,5n}(\varphi_n(x) - 1)$ при $x \geq 0$ и $n \geq 2$ имеет следующий вид, если $\alpha_{3,5n} = \beta_{5n} = \frac{115}{12}\, n^4 + \frac{115}{6}\, n^3 + \frac{185}{12}\, n^2 + \frac{35}{6}\, n + 1$

$\Phi_n(x) = 9\, x^4 n^4$ на интервале $\left[0, \frac{n+1}{3n}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{12}\big(- 297\, n^4 x^4 + 270\, n^3(2\, n + 1)x^3 - 45\, n^2(6\, n + 6\, n^2 - 1)x^2 + 30\, n(2\, n+ +1)(n^2 + n - 1)x - 5\, n(n - 1)(n + 2)(n + 1)\big)$ на интервале $\left[\frac{n+1}{3n}, \frac{1}{2}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{12}\big(- 57\, n^4 x^4 + 30\, n^3(2\, n + 1)x^3 + 15\, n^2(6\, n + 6\, n^2 - 1)x^2 - 30\, n(2\, n + 1)(n^2+ +n - 1)x + 10\, n(n - 1)(n + 2)(n + 1)\big)$ на интервале $\left[\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{12}\big(- 72n^4 x^4 + 60n^3(2n + 1)x^3 - 5\, n(n - 1)(n + 2)(n + 1)\big)$ на интервале $\left[\frac{n-1}{n}, \frac{3n+2}{3n}\right)$
$\Phi_n(x) = \frac{1}{24}\big(261n^4 x^4 - 690n^3(2n + 1)x^3 + 45\, n^2(11 + 54\, n + 54\, n^2)x^2 - 90\, n(2\, n+ +1)(9\, n^2 + 9\, n + 1)x + 5\, n(n + 1)(79\, n^2 + 79\, n + 22)\big)$ на интервале $\left[\frac{3n+2}{3n}, \frac{3n+1}{2n}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{24}\big(21n^4 x^4 + 30n^3(2n + 1)x^3 - 15\, n^2(11 + 54\, n + 54\, n^2)x^2 + 90\, n(2\, n+ +1)(9\, n^2 + 9\, n + 1)x - 20\, n(n + 1)(41\, n^2 + 41\, n + 8))\big)$ на интервале $\left[\frac{3n+1}{2n}, \frac{5n+3}{3n}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{24}\big(- 60n^4 x^4 + 300n^3(2n + 1)x^3 - 240\, n^2(3\, n + 2)(3\, n + 1)x^2 + 120\, n(2\, n+ +1)(13\, n^2 + 13\, n + 2)x - 1445\, n^4 - 2890\, n^3 - 1855\, n^2 - 410\, n - 24\big)$ на интервале $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{12}\big(- 6n^4 x^4 + 30n^3(2n + 1)x^3 - 30\, n^2(1 + 6\, n + 6\, n^2)x^2 + 30\, n(2\, n + 1)(n^2+ +n - 1)x + 24 + 170\, n + 215\, n^4 + 430\, n^3 + 385\, n^2\big)$ на интервале $\left[\frac{5n+2}{2n}, 3\right)$;
$\Phi_n(x) = \frac{1}{24}\big(3n^4 x^4 - 30n^3(2n + 1)x^3 + 15n^2(30n^2 + 30n + 7)x^2 - 150\, n(2\, n + 1)(5\, n^2+ +5\, n + 1)x + 48 + 610\, n + 1645\, n^4 + 3290\, n^3 + 2255\, n^2\big)$ на интервале $\left[3, 5\right)$;
$\Phi_n(x) = -3nx + 15n + 3 - \alpha_{3,5n}$ на интервале $\left[5, 5 + \frac{1}{n}\right)$.

Для доказательства теорем 2 и 3 понадобится информация о нулях функции $\Phi_n = \alpha_{s,rn}(\varphi_n - 1)$. Применим классическую теорему Фурье-Бюдана, которую запишем в виде леммы.

Лемма 4. [6, стр. 38] *Пусть $N(x)$ – число перемен знака в последовательности $f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$, где f – многочлен степени n. Тогда число корней много-члена f (с учетом их кратности), заключенных между a и b, где $f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$, причем число корней может отличаться от $N(a) - N(b)$ лишь на четное число.*

Лемма 5. *В случае $(s, r) = (3, 5)$ $\varphi_n(0) = 1$, при $x > 0$ $\varphi_n(x) = 1$ на $\left(0, 5 + \frac{1}{n}\right)$ один раз в точке $x_n \in \left[\frac{5}{3}, 2.85\right]$.*

Кроме того, при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$

$$|1 - \varphi_n(x)| \le c x^4 \big||x| - x_n\big|,$$

$$x^4 \big||x| - x_n\big| \le c|1 - \varphi_n(x)|.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.9792...$$

Доказательство. $\varphi_n(x)$ - это четный непрерывный сплайн, «склеенный» из 18 алгебраических полиномов четвертой степени.

На интервале $\left(0, \frac{n+1}{3n}\right)$ при $n \ge 2$ функция $\Phi_n(x) = 9\,x^4 n^4$ не имеет нулей. Применим лемму 4, вычисляя на концах каждого интервала односторонние пределы.

Интервал $\left[\frac{n+1}{3n}, \frac{1}{2}\right]$: $\Phi_n\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \frac{(n+1)^4}{9} > 0$; $\Phi_n'\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \frac{n}{6}(8n^3 + 24n^2 + 24n + 23) > 0$;
$\Phi_n''\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \frac{3n^2}{2}(8n^2 + 16n + 13) > 0$; $\Phi_n'''\left(\frac{n+1}{3n}\right) = 9n^3(8n - 7) > 0$;
$\Phi_n^{(4)}\left(\frac{n+1}{3n}\right) = -594n^4 < 0.$ $\Phi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{192}(103n^3 + 20n^2 + 20n - 80) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{8}(31n^3 + 15n^2 + 10n - 20) > 0$; $\Phi_n''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3n^2}{4}(21n^2 + 30n + 10) > 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{1}{2}\right) = -27n^3(n - 5) < 0$ $(n \ge 6)$; $\Phi_n^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -594n^4 < 0.$

Интервал $\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n}\right]$: $\Phi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{192}(103n^3 + 20n^2 + 20n - 80) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{8}(31n^3 + 15n^2 + 10n + 20) > 0$; $\Phi_n''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n^2}{4}(63n^2 + 90n - 10) > 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{1}{2}\right) = -3n^3(9n - 5) < 0$; $\Phi_n^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -114n^4 < 0.$
$\Phi_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{12}(43n^3 + 21n^2 - 226n + 132) > 0$ $(n \ge 2)$;
$\Phi_n'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{3n}{2}(4n^3 + 18n^2 - 48n + 21) > 0$ $(n \ge 2)$;
$\Phi_n''\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{n^2}{2}(24n^2 - 228n + 149) < 0$ $(n \ge 9)$;
$\Phi_n'''\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -3n^3(28n - 43) < 0$ $(n \ge 2)$; $\Phi_n^{(4)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -114n^4 < 0.$

Интервал $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{3n}\right]$: $\Phi_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{12}(43n^3 + 21n^2 - 226n + 132) > 0$ $(n \ge 2)$;
$\Phi_n'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3n(n-1)^2(2n + 13) > 0$ $(n \ge 2)$;
$\Phi_n''\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -6(n-1)n^2(2n - 17) < 0$ $(n \ge 9)$;
$\Phi_n'''\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -6n^3(14n - 29) < 0$ $(n \ge 3)$; $\Phi_n^{(4)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -144n^4 < 0.$
$\Phi_n\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{108}(387\,n^4 + 882\,n^3 + 837\,n^2 + 362\,n + 32) > 0$;
$\Phi_n'\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{9}n(6n - 1)(3n + 2)^2 > 0$; $\Phi_n''\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = -2(3n + 2)n^2(2n + 3) < 0$;
$\Phi_n'''\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = -6n^3(14n + 11) < 0$; $\Phi_n^{(4)}\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = -144n^4 < 0.$

Интервал $\left[1+\frac{2}{3n}, \frac{3n+1}{2n}\right]$: $\Phi_n\left(1+\frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{108}(387\,n^4+882\,n^3+837\,n^2+362\,n+32) > 0$;
$\Phi_n'\left(1+\frac{2}{3n}\right) = \frac{n}{36}(216n^3+252n^2+48n-61) > 0$;
$\Phi_n''\left(1+\frac{2}{3n}\right) = -\frac{n^2}{4}(48n^2+104n+63) < 0$; $\quad \Phi_n'''\left(1+\frac{2}{3n}\right) = -\frac{3n^3}{2}(56n-1) < 0$;
$\Phi_n^{(4)}\left(1+\frac{2}{3n}\right) = 261n^4 > 0$.
$\Phi_n\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = \frac{1}{384}(1541\,n^4+3568\,n^3+2734\,n^2+1232\,n+141) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = -\frac{3n}{16}(27n^3+12n^2+9n-4) < 0$; $\quad \Phi_n''\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = -\frac{3n^2}{8}(57n^2+88n+33) < 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = \frac{3n^3}{2}(31n-28) > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = 261n^4 > 0$.

Интервал $\left[\frac{3n+1}{2n}, \frac{5n+3}{3n}\right]$:
$\Phi_n\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = \frac{1}{384}(1541\,n^4+3568\,n^3+2734\,n^2+1232\,n+141) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = -\frac{n}{16}(81n^3+36n^2+27n+28) < 0$; $\Phi_n''\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = -\frac{n^2}{8}(171n^2+264n+59) < 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = \frac{3n^3}{2}(31n+12) > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{3n+1}{2n}\right) = 21n^4 > 0$.
$\Phi_n\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = \frac{1}{648}(1885\,n^4+2910\,n^3+855\,n^2-810\,n-648) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = -\frac{n}{108}(860n^3+1530n^2+1260n+297) < 0$;
$\Phi_n''\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = -\frac{n^2}{12}(160n^2+60n-51) < 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = \frac{n^3}{2}(100n+57) > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = 21n^4 > 0$.

Интервал $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right]$: $\quad \Phi_n\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = \frac{1}{648}(1885n^4+2910n^3+855n^2-810n-648) > 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = -\frac{5n}{54}(86n^3+153n^2+126n+27) < 0$; $\quad \Phi_n''\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = -\frac{5n^2}{3}(8n^2+3n-3) < 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = 5n^3(10n+3) > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{5n+3}{3n}\right) = -60n^4 < 0$.
$\Phi_n\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -\frac{1}{96}(455n^4+730n^3+640n^2+320n+96) < 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -\frac{5n}{8}(12n^3+21n^2+12n+4) < 0$; $\quad \Phi_n''\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = \frac{5n^2}{2}(3n^2+3n+2) > 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = 15n^3 > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -60n^4 < 0$.

Интервал $\left[\frac{5n+2}{2n}, 3\right]$: $\quad \Phi_n\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -\frac{1}{96}(455n^4+730n^3+640n^2+320n+96) < 0$;
$\Phi_n'\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -\frac{n}{8}(60n^3+105n^2+60n+16) < 0$; $\quad \Phi_n''\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = \frac{n^2}{2}(15n^2+15n+8) > 0$;
$\Phi_n'''\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = 3n^3 > 0$; $\quad \Phi_n^{(4)}\left(\frac{5n+2}{2n}\right) = -12n^4 < 0$.
$\Phi_n(3) = -\frac{1}{12}(91n^4+110n^3-25n^2-80n-24) < 0$; $\Phi_n'(3) = -\frac{n}{2}(8n^3+30n^2+35n+5) < 0$;
$\Phi_n''(3) = n^2(6n^2+15n-5) > 0$; $\Phi_n'''(3) = -3n^3(2n-5) < 0 (n \geq 3)$; $\Phi_n^{(4)}(3) = -12n^4 < 0$

Интервал $[3,5]$: $\Phi_n(3) = -\frac{1}{12}(91n^4 + 110n^3 - 25n^2 - 80n - 24) < 0$;
$\Phi'_n(3) = -\frac{n}{4}(4n+5)(4n^2+10n+5) < 0$; $\Phi''_n(3) = \frac{n^2}{4}(24n^2+60n+35) > 0$;
$\Phi'''_n(3) = -\frac{3n^3}{2}(4n+5) < 0$; $\Phi^{(4)}_n(3) = 3n^4 > 0$.
$\Phi_n(5) = -\frac{1}{12}(115n^4 + 230n^3 + 185n^2 + 70n - 24) < 0$; $\Phi'_n(5) = -\frac{25n}{4} < 0$;
$\Phi''_n(5) = \frac{35n^2}{4} > 0$; $\Phi'''_n(5) = -\frac{15n^3}{2} < 0$; $\Phi^{(4)}_n(5) = 3n^4 > 0$.

Полученные данные при $n \geq 10$ занесем в таблицу 2.

Таблица 2

x	$\Phi_n(x)$	$\Phi'_n(x)$	$\Phi''_n(x)$	$\Phi^{(3)}_n(x)$	$\Phi^{(4)}_n(x)$	$N(x)$
0	0	0	0	0	+	0
$\frac{n+1}{3n}$	+	+	+	+	+	0
$\frac{n+1}{3n}$	+	+	+	+	−	1
$\frac{1}{2}$	+	+	+	−	−	1
$\frac{1}{2}$	+	+	+	−	−	1
$1-\frac{1}{n}$	+	+	−	−	−	1
$1-\frac{1}{n}$	+	+	−	−	−	1
$1+\frac{2}{3n}$	+	+	−	−	−	1
$1+\frac{2}{3n}$	+	+	−	−	+	2
$\frac{3n+1}{2n}$	+	−	−	+	+	2
$\frac{3n+1}{2n}$	+	−	−	+	+	2
$\frac{5n+3}{3n}$	+	−	−	+	+	2
$\frac{5n+3}{3n}$	+	−	−	+	−	3
$\frac{5n+2}{2n}$	−	−	+	+	−	2
$\frac{5n+2}{2n}$	−	−	+	+	−	2
3	−	−	+	−	−	2
3	−	−	+	−	+	3
5	−	−	+	−	+	3

Для $n \in [1,9]$ найдены численные значения x_n (приближенно).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	2.8408	2.4354	2.2907	2.2159	2.1701	2.1392	2.1169	2.1	2.0869

Таким образом, при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$ на интервале $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right] \subseteq \left[\frac{5}{3}, \frac{13}{5}\right]$ функция $\varphi_n(x) - 1$ имеет один (простой) нуль x_n, а при $n \in [1;9]$ эта функция имеет только простой нуль $x_n \in [2.08, 2.85]$. На других интервалах нулей нет.

Функция φ_n на каждом из промежутков является полиномом четвертой степени с ограниченными по n коэффициентами, а точки 0 и x_n отделены абсолютной константой. Поэтому выполняется неравенство

$$|1 - \varphi_n(x)| \leq cx^4 \big||x| - x_n\big|.$$

Для доказательства противоположного неравенства достаточно проверить, что при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$ и некотором $c > 0$

$$|1 - \varphi_n(x)| \ge c \min\left\{x^4, \big||x| - x_n\big|\right\}.$$

Считаем далее, что $n \ge 2$. Функция φ_n' может иметь разрывы только 1 рода (скачки). Применяем нижнюю оценку в неравенстве (3) леммы 1. Получаем, что при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$ $\quad |1 - \varphi_n(x)| \ge c_1 x^4$.

На отрезке $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right]$ $(n \ge 2)$ минимум функции

$$\varphi_n'(x) = -\frac{5n}{2\alpha_{3,5n}}(4n^3x^3 - 15n^2(2n+1)x^2 + 8n(3n+2)(3n+1)x - 2(2n+1)(13n^2+13n+2))$$

достигается в точке $\frac{30n+15-\sqrt{36n^2+36n+33}}{12n}$. Кроме того,

$$\varphi_n'\Big(\frac{5n+3}{3n}+0\Big) = -\frac{5n(86n^3+153n^2+126n+27)}{54\alpha_{3,5n}} < 0, \quad \Big|\varphi_n'\Big(\frac{5n+3}{3n}+0\Big)\Big| \ge 0.7674;$$

$$\varphi_n'\Big(\frac{5n+2}{2n}-0\Big) = -\frac{5n(12n^3+21n^2+12n+4)}{8\alpha_{3,5n}} < 0, \quad \Big|\varphi_n'\Big(\frac{5n+2}{2n}-0\Big)\Big| \ge 0.6824;$$

$$\varphi_n'\Big(\frac{30n+15-\sqrt{36n^2+36n+33}}{12n}\Big) < 0, \ \Big|\varphi_n'\Big(\frac{30n+15-\sqrt{36n^2+36n+33}}{12n}\Big)\Big| \ge 0.8538.$$

Тогда на $\left[\frac{5n+3}{3n}, \frac{5n+2}{2n}\right]$ $(n \ge 2)$

$$\Big|\frac{1-\varphi_n(x)}{x-x_n}\Big| = \Big|\int\limits_0^1 \varphi_n'(x_n + u(x-x_n))du\Big| = \int\limits_0^1 \big|\varphi_n'(x_n + u(x-x_n))\big|du \ge 0.6824.$$

Следовательно, при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$

$$|1 - \varphi_n(x)| \ge \min\left\{c_1x^4, c_2\big||x| - x_n\big|\right\}$$

Случай $n = 1$ рассматривается отдельно.

Лемма 5 доказана.

Переходим к функции $\psi(x,t)$ (см. (1)).

Лемма 6. *При* $t \in \left[\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\right]$ *и* $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x,t)| \le c|x| \cdot |x-t|, \tag{8}$$

и

$$\min\{1, |x| \cdot |x-t|\} \le c|\psi(x,t)|. \tag{9}$$

Доказательство. При $t \in [1.386, 2]$ эта лемма доказана в [4]. Доказа-тельство основано на том, что при указанных t $\psi(x,t) = 0$ только при $x = 0$ и $x = t$. А для того, чтобы были только эти два корня, как доказано в [3; 4] , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$e^{\frac{1}{2}(a(t)-\overline{a(t)})} \neq \frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}e^{-it},$$

где

$$a(t) = \frac{2\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)e^{-it} + 3\lambda(t) + \overline{\lambda(t)}}{2|\lambda(t)-1|^2}.$$

Введем функцию

$$H(t) = Im\Big[\frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}e^{-it} - e^{\frac{1}{2}(a(t)-\overline{a(t)})}\Big] =$$
$$= \frac{t(2\cos t + t\sin t - 2)}{2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)} - \sin\frac{2\sin t - t(1+\cos t)}{1-\cos t}$$

и докажем, что при $t \in [0.5, 3.5]$ $\quad H(t) > 0$. Понадобится оценка сверху $|H'(t)|$.

$$|H'(t)| \leq \Big|\Big[\frac{t(2\cos t + t\sin t - 2)}{2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)}\Big]'\Big| + \Big|\Big[\frac{2\sin t - t(1+\cos t)}{1-\cos t}\Big]'\Big| =$$
$$= \Big|\frac{(2\cos t + t^2 - 2)(2t\sin t - t^2\cos t + 2\cos t - 2)}{[2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)]^2}\Big| + \Big|\frac{\cos^2 t + 2\cos t + 2t\sin t - 3}{(1-\cos t)^2}\Big|$$

Очевидно, что если $H(t_1) > 0$ и $|H'(t)| \leq M_1$ при $t \in [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$, где $\delta_1 = \frac{1}{M_1}H(t_1)$, то и при $t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$ по теореме Лагранжа

$$H(t) \geq H(t_1) - M_1|t - t_1| > H(t_1) - H(t_1) = 0. \qquad (10)$$

Если при $s \geq 0$ $\quad H(t_s) > 0$, то полагаем $t_{s+1} = t_s + 2\delta_s$, где $H_s = H(t_s + \delta_s) > 0$ и

$$\max_{t_s \leq t \leq t_{s+1}} |H'(t)| \leq M_s.$$

Если при этом $\delta_s \leq \frac{H_s}{M_s}$ и $H(t_{s+1}) > 0$, то в силу (10) $H(t) > 0$ при $t \in [t_s, t_{s+1}]$. И так далее.

На интервале $[0.5, 1.386]$ $|H'(t)| \leq M < 0,65$; $\quad t_0 = 0,5,\ H(t_0) > 0,003$.

$t_1 = t_0 + 2\delta_0$; $\quad t_1 = 0,5 + 2\frac{0,003}{0,65} = 0,509$ и $H(t_1) > 0,0032$

$t_2 = t_1 + 2\delta_1$; $\quad t_2 = 0,509 + 2\frac{0,0032}{0,65} = 0,52$ и $H(t_2) > 0,0034$ и так далее. Делая конечное число шагов, мы пройдем весь интервал.

На интервале $[2,3,5]$ $\quad |H'(t)| \leq M < 0,2$; $\quad t_0 = 2,\ H(t_0) > 0,1909$.

$t_1 = t_0 + 2\delta_0$; $\quad t_1 = 2 + 2\frac{0,1909}{2} = 2,095$ и $H(t_1) > 0,2203$.

Далее запишем пары значений $(t_j, H(t_j))$: (2.21,0.2585); (2.33,0.31); (2.49,0.3831); (2.68,0.4945); (2.93,0.6846); (3.27,1.0685); (3.8,1.8965).

Докажем теперь неравенство (8). При $t \in (0, 2\pi)$, учитывая (1),

$$|\lambda(t)| \le \frac{\left|2i\int_0^t (1-e^{iu})du\right|}{2(1-\cos t)^2} \le \frac{\int_0^t |1-e^{iu}|du}{4\sin^4\frac{t}{2}} = \frac{\int_0^t 2\sin\frac{u}{2}du}{4\sin^4\frac{t}{2}} = \frac{4(1-\cos\frac{t}{2})}{4\sin^4\frac{t}{2}} \le \frac{2}{\sin^4\frac{t}{2}}$$

Поэтому при $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x,t)| \le |1-\lambda(t)| + |2\lambda(t)-1| + |\lambda(t)| \le 4|\lambda(t)| + 2 \le 2\Big(1 + \frac{2}{\sin^4\frac{t}{2}}\Big).$$

Но $\psi(z,t)$ – целая функция по z экспоненциального типа 2 и по неравенству Бернштейна, например,

$$|\psi'_x(x,t)| \le 4\Big(1 + \frac{2}{\sin^4\frac{t}{2}}\Big), \qquad |\psi''_x(x;t)| \le 8\Big(1 + \frac{2}{\sin^4\frac{t}{2}}\Big).$$

Поэтому при $t \in \left[\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right]$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x,t)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi'_x(x,t)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi''_x(x,t)| \le 14\Big(1 + \frac{2}{\sin^4\frac{1}{6}}\Big) = c_3$$

и, следовательно, при $t \in \left[\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right]$

$$\Big|\frac{\psi(x,t)}{x-t}\Big| = \Big|\frac{\psi(x,t)-\psi(t,t)}{x-t}\Big| = \Big|\int_0^1 \psi'_x(t+u(x-t),t)du\Big| \le c_3,$$
$$|\psi(x,t)| = |\psi(x,t) - \psi(0,t)| \le c_3|x|$$

Неравенство (8) доказано. Доказательство неравенства (9) аналогично приведенному доказательству в [4] (лемма 6). Лемма 6 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Очевидно, что

$$\Delta^1_{h,0}e_k(x) = e_k(x)\int_0^1 \Big(1 - e^{ikhu}\Big)du,$$
$$\Delta^1_{h,t}e_k(x) = e_k(x)\int_0^1 \Big[1 - e^{ikhu} - \lambda\big(1-e^{ikhu}\big)^2\Big]du, \qquad (t \ne 0).$$

Поэтому

$$\psi(x,0) = \int_0^1 \Big(1 - e^{ixu}\Big)du = 1 - \frac{e^{ix}-1}{ix},$$
$$\psi(x,t) = 1 - \lambda + (2\lambda - 1)\frac{e^{ix}-1}{ix} - \lambda\frac{e^{2ix}-1}{2ix},$$

где $\lambda = \lambda(t) = \frac{2(it+1-e^{it})}{2it+3-4e^{it}+e^{2it}}$,

$$\Delta^1_{h,t} f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(kh,t)\widehat{f}_k e_k.$$

В силу леммы 2 нужно проверить для оценки приближения сверху и снизу, соответственно, что

$$\sup_n \Big\| \Big\{ g_n\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big\} \Big\|_M < \infty, \quad \sup_n \Big\| \Big\{ \frac{1}{g_n\Big(\frac{k}{n}\Big)} \Big\} \Big\|_M < \infty,$$

где при $x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{1-\varphi_n(x)}{\psi(x)\psi(-x)}, \quad g_n(\infty) = \frac{1}{(1-\lambda)^2}.$$

При $t \in \left[\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\right]$

$$|1-\lambda(t)| = \frac{2|1-e^{it}|^2}{|2it+3-4e^{it}+e^{2it}|} \geq \frac{8\sin^2\frac{t}{2}}{2t+8} \geq \frac{12}{13}\sin^2\frac{1}{6}.$$

Будем доказывать (см. лемму 3), что

$$\sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_2 + \sup_n \|g_n'\|_2 < \infty, \quad \sup_n \Big\| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{g_n(\infty)} \Big\|_2 + \sup_n \Big\| \Big(\frac{1}{g_n}\Big)' \Big\|_2 < \infty.$$

Функция $\psi(x,0) = 1 - \frac{e^{ix}-1}{ix}$ имеет (простой) нуль $x=0$ и только.

При $|x| \leq 5$

$$g_n(x) = \frac{1}{|x|+x_n} \cdot \frac{x^2}{(\psi(x,0))^2} \cdot \frac{1-\varphi_n(x)}{x^4\big||x|-x_n\big|} \cdot \frac{x(x-x_n)}{\psi(x,x_n)} \cdot \frac{x(x+x_n)}{\psi(x,-x_n)}$$

или

$$g_n(x) = \frac{1}{|x|+x_n} \cdot \frac{x^2}{(\psi(x,0))^2} g_{1,n}(x) \cdot g_{2,n}(x) \cdot g_{2,n}(-x).$$

Очевидно, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|h_n\|_2^2 &= \int_{|x|\leq 5+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx + \int_{|x|\geq 5+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx \leq \\ &\leq 12 \sup_{|x|\leq 5+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 + \int_{|x|\geq 5+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Применим это неравенство к функциям $h_n = g_n - g_n(\infty)$ и h_n', учитывая, что

$$\sup_n \|g_n\|_B \leq \sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_A + \sup_n |g_n(\infty)| \leq \sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_A + c_4.$$

Так как $g_{1,n}(x)$ – сплайн, «склеенный» из полиномов не выше четвертой степени с ограниченными по n коэффициентами, то при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$

$$|g_{1,n}(x)| + |g'_{1,n}(x)| \le c_5.$$

К $g_{2,n}(x)$ применяем лемму 6: при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$

$$|g_{2,n}(x)| \le c_6, \qquad \Big|\frac{1}{g_{2,n}(x)}\Big| \le c_7.$$

Но $\frac{1}{g_{2,n}(x)}$ – целая функция экспоненциального типа 2. Поэтому по неравенству Бернштейна

$$\Big|\frac{g'_{2,n}(x)}{g^2_{2,n}(x)}\Big| = \Big|\Big(\frac{1}{g_{2,n}(x)}\Big)'\Big| \le 2c_7, \qquad \Big|g'_{2,n}(x)\Big| \le 2c_7 \cdot c_6^2.$$

Следовательно, при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$

$$|g_n(x)| + |g'_n(x)| \le c_8.$$

При $|x| \ge 5 + \frac{1}{n}$ $g_n(x) = \frac{1}{\psi(x,x_n)\psi(x,-x_n)}$. Значит,

$$\int_{|x|\ge 5+\frac{1}{n}} \Big(|g_n(x) - g_n(\infty)|^2 + |g'_n(x)|^2\Big)dx \le c_9.$$

Оценка в теореме приближения сверху доказана.

Применяя леммы 5 и 3 при $|x| \le 5 + \frac{1}{n}$, получаем

$$\Big|\frac{1}{g_n(x)}\Big| = (|x| + x_n) \cdot \frac{(\psi(x,0))^2}{x^2} \cdot \Big|\frac{x^4\big(|x| - x_n\big)}{1 - \varphi_n(x)}\Big| \cdot \Big|\frac{\psi(x,x_n)}{x(x - x_n)}\Big| \cdot \Big|\frac{\psi(x,-x_n)}{x(x + x_n)}\Big| \le c_{10}.$$

и

$$\sup_{|x|\le 5+\frac{1}{n}} \Big|\Big(\frac{1}{g_n}\Big)'\Big|^2 + \int_{|x|\ge 5+\frac{1}{n}} \Big|\Big(\frac{1}{g_n}\Big)'\Big|^2 dx \le c_{11}.$$

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим случай $(s,r) = (4,6)$. Множители при коэффициентах Фурье $\widehat{f}_k$ у полинома $\widetilde{\tau}_{4,6,n}$ равны

$$\lambda_{k,n} = \frac{1}{2\pi\beta_{6n}} \int_{-\pi}^{\pi} \big[4e^{ikt} - 6e^{2ikt} + 4e^{3ikt} - e^{4ikt}\big] D_n^6(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\beta_{6n}}(4\beta_{|k|+6n} - 6\beta_{2|k|+6n} + 4\beta_{3|k|+6n} - \beta_{4|k|+6n}).$$

Полагаем, что четная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция при $|x| \le 6$

$$\varphi_n(x) = \frac{6}{\beta_{6n}}\Big[4S_1^{\alpha_1} - 6S_2^{\alpha_2} + 4S_3^{\alpha_3} - S_4^{\alpha_4}\Big],$$

где для $\alpha_j = \{0,1,2\}$, $j = \{1,2,3,4\}$, $S_j^{\alpha_j}$ см. в (7), $\varphi_n(x) = 0$, когда $|x| \ge 6 + \frac{1}{n}$, и линейна на $\big[-6-\frac{1}{n}, -6\big]$ и $\big[6, 6+\frac{1}{n}\big]$, $\lambda_{k,n} = \varphi_n\Big(\frac{|k|}{n}\Big)$.
Для удобства запишем значения параметров α_j на интервалах в виде таблицы 3.

Таблица 3

	Интервалы	α_1	α_2	α_3	α_4		Интервалы	α_1	α_2	α_3	α_4
1	$\Big[0, \frac{n+1}{2n}\Big)$	2	2	2	2	7	$\Big[\frac{3}{2}+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\Big)$	2	1	0	-
2	$\Big[\frac{n+1}{2n}, \frac{2n+1}{3n}\Big)$	2	2	2	1	8	$\Big[2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{2n}\Big)$	1	1	0	-
3	$\Big[\frac{2n+1}{3n}, 1\Big)$	2	2	1	1	9	$\Big[2+\frac{1}{2n}, 2+\frac{1}{n}\Big)$	1	0	0	-
4	$\Big[1, 1+\frac{3}{4n}\Big)$	2	1	1	1	10	$\Big[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\Big)$	1	0	-	-
5	$\Big[1+\frac{3}{4n}, \frac{4n+2}{3n}\Big)$	2	1	1	0	11	$\Big[3+\frac{1}{n}, 4\Big)$	1	-	-	-
6	$\Big[\frac{4n+2}{3n}, \frac{3}{2}+\frac{1}{n}\Big)$	2	1	0	0	12	$[4, 6)$	0	-	-	-

Знак (-) в таблице означает, что соответствующая сумма S_j равна нулю.
Пользуясь этой формулой, нетрудно выписать вид функции $\varphi_n(x)$.

Лемма 7. *В случае* $(s,r) = (4,6)$ $\varphi_n(0) = 1$, *при* $x > 0$ $\varphi_n(x) = 1$ *на* $\Big(0, 6+\frac{1}{n}\Big)$ *два раза в точках* $x_{j,n}, j = \{1,2\}$. *При этом при* $n \in \mathbb{N}$ $x_{1,n} \in [0.5, 0.9]$; $x_{2,n} \in [2, 3.45]$.

Кроме того, при $|x| \le 6 + \frac{1}{n}$

$$|1 - \varphi_n(x)| \le cx^4\big||x| - x_{1,n}\big| \cdot \big||x| - x_{2,n}\big|,$$
$$x^4\big||x| - x_{1,n}\big| \cdot \big||x| - x_{2,n}\big| \le c|1 - \varphi_n(x)|.$$

Доказательство леммы 7 аналогично приведенному доказательству леммы 5. Приведем только таблицу знаков производных функции $\Phi_n(x) = \alpha_{4,6n}(\varphi_n(x) - 1)$ при $n \ge 18$ и таблицу 4 численных значений $x_{j,n}$, $(j = 1,2)$ при $1 \le n \le 17$.

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} x_{1,n} = 0.6005...; \quad x_2 = \lim_{n\to\infty} x_{2,n} = 2.4164...$$

Таблица 4

x	$\Phi_n(x)$	$\Phi'_n(x)$	$\Phi''_n(x)$	$\Phi_n^{(3)}(x)$	$\Phi_n^{(4)}(x)$	$\Phi_n^{(5)}(x)$	$N(x)$
$\frac{n+1}{2n}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
$\frac{2n+1}{3n}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$\frac{2n+1}{3n}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	2
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$1+\frac{3}{4n}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$1+\frac{3}{4n}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$\frac{4n+2}{3n}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	2
$\frac{4n+2}{3n}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
$\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
$\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
$2-\frac{1}{n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
$2-\frac{1}{n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
$2+\frac{1}{2n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
$2+\frac{1}{2n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
$2+\frac{1}{n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
$2+\frac{1}{n}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
$3+\frac{1}{n}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
$3+\frac{1}{n}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
4	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	3
4	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	4
6	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	4

Численные приближенные значения $x_{j,n}$ при $n \in [1,17]$ (см. таблицу 5):

Таблица 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{1,n}$	0.9	0.75	0.7	0.6749	0.6601	0.6502	0.6431	0.6378	0.6337
$x_{2,n}$	3.4466	2.9724	2.7993	2.7039	2.6485	2.6111	2.5840	2.5636	2.5476

Продолжение таблицы 5

n	10	11	12	13	14	15	16	17
$x_{1,n}$	0.6304	0.6277	0.6254	0.6235	0.6219	0.6205	0.6192	0.6181
$x_{2,n}$	2.5347	2.5242	2.5154	2.5079	2.5014	2.4958	2.4909	2.4866

Доказательство теоремы 3 аналогично приведенному доказательству теоремы 2, только нужно рассмотреть при $|x| \leq 6 + \frac{1}{n}$ следующую функцию

$$g_n(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{|x| + x_{j,n}} \cdot \frac{1 - \varphi_n(x)}{x^4\big||x| - x_{j,n}\big|} \cdot \frac{x(x - x_{j,n})}{\psi(x, x_{j,n})} \cdot \frac{x(x + x_{j,n})}{\psi(x, -x_{j,n})}.$$

Библиографические ссылки

1. *Draganov B. R.* Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators//Journal Appr. Theory – 2010. – Vol. 162. – pp. 952-979.
2. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие/ В. И. Иванов //Тр. ИММ УроРАН – 2010. т. 16, № 4, С. 5-17.
3. *Коломойцев Ю. С.* Об одном неклассическом методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами /Ю. С. Коломойцев, Р. М. Тригуб // Укр. мат. вiсник – 2012. –т. 9, –№ 3, – С. 356-374.
4. *Котова О. В.* Точный порядок приближения периодических функций одним неклассическим методом суммирования рядов Фурье / О. В. Котова, Р. М. Тригуб // Укр. мат. журн. – 2012. – т. 64, № 7, –С.954–969.
5. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener Algebra of Absolutely Convergent Fourier Integrals: an overview // Analysis and Math.Physics, Springer. – 2012. – Vol. 2, № 1 – p. 1-68.
6. *Прасолов В. В.* Многочлены. / В. В. Прасолов – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
7. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. /И. Стейн, Г. Вейс – М.: Мир. – 1974. –336 с.
8. *Стечкин С. Б.*// О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С. Б. Стечкин – Изв. АН СССР. –т. 15, № 3. – 1951. –С. 219–242.
9. *Trigub R. M.* Exact order of approximation of periodic functions by linear polynomial operators // East journal on approximations – 2009. – Vol. 15, № 1. – P. 25–50.
10. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier Analysis and Approximation of functions, Kluwer-Springer. – 2004. – 585 p.

Надійшла до редколегії 21.03.2013