ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций

В. Ф. Бабенко[*,], С. В. Савела[*]**

[*] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail:* ssvet05@mail.ru

[**] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк. *E-mail:* babenko.vladislav@gmail.com

Знайденi точнi нерiвностi типу Джексона-Стєчкiна для апроксимацiї B^2-майже перiодичних функцiй, що мiстять узагальнений модуль неперервностi.

Ключовi слова: найкраще наближення, B^2-майже перiодичнi функцiї, нерiвностi типу Джексона-Стєчкiна, узагальнений модуль неперервностi.

Получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации B^2-почти периодических функций, содержащие обобщенный модуль непрерывности.

Ключевые слова: наилучшее приближение, B^2-почти периодические функции, неравенства типа Джексона-Стечкина, обобщенный модуль непрерывности.

The exact inequalities of the Jackson-Stechkin type of the approximation B^2-almost periodic function are obtained.

Key words: best approximation, B^2-almost periodic function, inequalities of the Jacson-Stechkin type, generalized modulus of continuity.

1. Введение

Для наилучших среднеквадратических приближений 2π-периодических функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами хорошо известны точные неравенства типа Джексона-Стечкина, полученные Н.И. Черных [1; 2]:

$$E_n(f) < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \tag{1}$$

$$E_n(f) < \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right), \tag{2}$$

где $\omega_m(f,t)$ – модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, $\omega_1(f,t) = \omega(f,t)$. Исследования, связанные с точными неравенствами такого вида, развивались в разных направлениях. При этом, в частности, рассматривались следующие две задачи.

1. Чему равна точная константа в неравенстве

$$E_{n-1}\left(f\right)_{L_2} \le \chi\omega_m\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2}, m \ge 2 \; ? \tag{3}$$

2. Каково наименьшее $\delta > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_2$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}\left(f\right)_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f,\delta\right)_{L_2}, m \ge 2\ ? \tag{4}$$

Относительно первой задачи С.Н. Васильев [3] и, независимо, А.И. Степанец, А.С. Сердюк [4] показали, что для точной константы χ справедлива оценка

$$\chi \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}.$$

Что касается минимальной точки δ в неравенстве (2), то для неё С.Н. Васильев [3] получил оценку

$$\delta \le \frac{1.4\pi}{n}.$$

В работах Шапиро и Бомана [6–8] было предложено обобщенным модулем непрерывности функции $f \in L_2$ называть величину

$$\omega_\psi\left(f,T\right)_{L_2} = \max_{t\in T}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}}\psi(st)|\widehat{f}_s|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\widehat{f}_s$ – s-й коэффициент Фурье функции f, $\psi(\cdot)$ – заданная непрерывная неотрицательная 2π-периодическая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(\cdot) \ne 0$ а T – заданное замкнутое подмножество $[0, 2\pi]$.

Обобщенные модули непрерывности такого типа включают в себя, помимо классических модулей непрерывности, модули непрерывности, порожденные более общими, по сравнению с $\Delta_t^m f$ конечно разностными операторами, модули непрерывности,порождаемые разностными операторами дробных порядков и многие другие. Получению точных неравенств типа Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности были посвящены работы А.Г. Бабенко [9], С.Н. Васильева [5; 3], А.И. Козко и А.В. Рождественского [10; 11] и др.

Неравенства типа Джексона-Стечкина с точными константами для B^2- почти периодических функций были получены в работах Я.Г. Притулы [12] (аналог неравенства 1) и В.Ф. Бабенко, С.В. Савелы [13] (аналог неравенства 2). В данной работе мы получим точные неравенства типа Джексона-Стечкина для почти периодических функций с обобщенными модулями непрерывности.

2. Определения, обозначения, вспомогательные сведения

Приведём необходимые сведения, связанные с почти периодическими функциями [14; 15; 16].

Пусть B^p – это совокупность функций, измеримых и суммируемых со степенью p, $p \ge 1$, в каждом конечном интервале действительной оси с метрикой

$$D_{B^p}[f(x), g(x)] = \left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x) - g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Пусть также $\mathbf{T}$ – множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x},$$

где λ_k – любые действительные числа, a_k – комплексные коэффициенты. Замыкание в пространстве B^p множества $\mathbf{T}$ называется классом B^p почти периодических функций (B^p-п.п. функций).

Как известно, B^{p_2} -п.п.$\subset B^{p_1}$ -п.п., если $p_1 < p_2$. Для каждой функции $f \in B^1$-п.п. существует среднее значение

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x)dx.$$

Функция $a(\lambda, f) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, может отличаться от нуля не более, чем на счетном множестве значений; в результате нумерации которых в произвольном порядке получается последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ показателей Фурье функции f. Числа $A_{\lambda_k} = a(\lambda_k, f)$ называются коэффициентами Фурье функции f. Функции $f \in B^1$-п.п. соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_k A_{\lambda_k} e^{i\lambda_k x}.$$

Мы получим точные неравенства типа Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности для почти периодических функций Безиковича класса B^2 (B^2-п. п. функции), показатели Фурье которых имеют единственную предельную точку в бесконечности. Для таких функций $f(x)$ ряды Фурье будем записывать в следующей симметричной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}, \qquad A_k = M\left\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\right\},$$

где $\lambda_{-k} = -\lambda_k$; $|A_k| + |A_{-k}| > 0$, $k \neq 0$; $\lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ при $k > 0$. Пусть G_{λ_n} – множество B^2-п. п. функций, показатели Фурье которых лежат в интервале $(-\lambda_n, \lambda_n)$. Определим величину наилучшего приближения B^2-п. п. функции f

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g\in G_{\lambda_n}} \left[M\left\{|f(x) - g(x)|^2\right\}\right]^{1/2}, \quad n = 1, 2, ...$$

Обозначим через $M = \{\mu_j\}_{j=0}^m$ – ненулевой набор комплексных чисел таких, что $\sum\limits_{j=0}^m \mu_j = 0$. Набору M поставим в соответствие разностный оператор и модуль непрерывности

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^m \mu_j f(x + jt),$$

$$\omega_M(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[M\left\{|\Delta_t^{(m)}f(x)|^2\right\}\right]^{1/2}, \quad t \ge 0.$$

Так как $\Delta_t^{(m)}f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m}\mu_j f(x+jt) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_k x}\left(\sum\limits_{j=0}^{m}\mu_j e^{i\lambda_k jt}\right)$,
то

$$M\left\{|\Delta_t^{(m)}f(x)|^2\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A_k|^2\left|\sum_{j=0}^{m}\mu_j e^{i\lambda_k jt}\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A_k|^2\varphi(\lambda_k t),$$

где $\varphi(t) = \varphi_M(t) = \left|\sum\limits_{j=0}^{m}\mu_j e^{ijt}\right|^2$ – неотрицательная 2π-периодическая функция, обращающаяся в нуль в точке $t=0$.

Приведенные соображения служат мотивировкой для следующего определения обобщенного модуля непрерывности B^2- почти периодической функции.

Обозначим через Φ класс всех непрерывных 2π-периодических неотрицательных ненулевых функций φ, таких, что $\varphi(0)=0$. Для произвольной функции $\varphi\in\Phi$ введем обобщенный модуль непрерывности, полагая

$$\omega_\varphi(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A_k|^2\varphi(\lambda_k t)\right]^{1/2}.$$

3. Основные результаты

Обозначим через $I(\varphi) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)dt$ среднее значение функции $\varphi\in\Phi$ на периоде.

Теорема 1. *Для каждой функции $\varphi\in\Phi$ существует точка $\gamma>0$, зависящая только от функции φ, такая, что для любой B^2-п.п. функции f выполняется неравенство*

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right). \tag{5}$$

При этом

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B^2}\frac{E_{\lambda_n}(f)}{\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}. \tag{6}$$

Данная теорема обобщает теорему С. Н. Васильева из работы [5]. При доказательстве нашей теоремы мы будем существенно использовать её результаты.

Доказательство. Из равенства Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 = M\left\{|f(x)|^2\right\}$$

следует, что

$$E_{\lambda_n}(f) = \left[\sum_{|k|\geq n} |A_k|^2\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим функцию $\psi(t) = (\varphi(t) - \varphi(-t))/2$, которая принадлежит классу Φ и является четной. При $|t| < \delta$ из определения $\omega_\varphi(f,\delta)$

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \varphi(\lambda_k t)$$

и

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \varphi(-\lambda_k t).$$

Отсюда получаем, что

$$\omega_\varphi^2(f,\delta) \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \psi(\lambda_k t).$$

Пусть v – некоторый вес на $[0;1]$, т. е. неотрицательная интегрируемая функция, отличная от нуля на множестве положительной меры. Для произвольного числа $\delta > 0$ и веса v имеем

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t) v(t/\delta) dt \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 \int_0^\delta \psi(\lambda_k t) v(t/\delta) dt \geq \delta \sum_{|k|\geq n} |A_k|^2 \int_0^1 \psi(\lambda_k \delta t) v(t) dt.$$

Определим для $h \in \mathbb{R}$ величину

$$\Gamma(v,h) = \inf\left\{\int_0^1 \psi(xt)v(t)dt \quad : \quad |x| \geq |h|, \quad x \in \mathbb{R}\right\},$$

тогда

$$\int_0^\delta \omega_\varphi^2(f,t)\, v(t/\delta) dt \geq \delta \sum_{|k|\geq n} |A_k|^2 \Gamma(v, \lambda_k \delta) \geq \delta \Gamma(v, \lambda_n \delta) E_{\lambda_n}^2(f).$$

Положим $P(v) = \int\limits_0^1 v(t)dt = \frac{1}{\delta} \int\limits_0^\delta v(t/\delta)dt$.

Поскольку модуль непрерывности не убывает, то из последней цепочки неравенств

$$E^2_{\lambda_n}(f) \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)} \frac{\int\limits_0^\delta \omega^2_\varphi(f,t)v(t/\delta)dt}{\int\limits_0^\delta v(t/\delta)dt} \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\lambda_n\delta)}\omega^2_\varphi(f,\delta).$$

В работе [5] доказано, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует вес v такой, что $\Gamma(v,\gamma) \ge I(\varphi)P(v)$ при некотором $\gamma > 0$. Используя такой вес, из предыдущего неравенства выводим

$$E_{\lambda_n}(f)^2 \le \frac{P(v)}{\Gamma(v,\gamma)}\omega^2_\varphi(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}) \le \frac{1}{I(\varphi)}\omega^2_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Следовательно,

$$E_{\lambda_n}(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\omega_\varphi\left(f,\frac{\gamma}{\lambda_n}\right).$$

Неравенство 5 доказано. Соотношение 3 следует из его справедливости для периодических функций. Теорема полностью доказана.

В заключение приведем (без доказательства) аналоги утверждений из работы [3], относящиеся к задаче 2. Доказательства могут быть проведены аналогично доказательствам из этой работы.

Теорема 2. *Для любых $\varphi \in \Phi$, $f \in B^2$-п.п., $\delta \ge \frac{7}{5\lambda_n}$ и веса*

$$v(t) = \begin{cases} \frac{2t}{7}, & t \in \left[0,\frac{1}{7}\right], \\ \frac{-t^2}{2} + \frac{3t}{7} - \frac{1}{98}, & t \in \left[\frac{1}{7},\frac{5}{7}\right], \\ \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{5}{7},1\right], \end{cases}$$

выполняется неравенство

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{I(\varphi)}\left(\frac{\int\limits_0^\delta \omega_\varphi(f,t)v(t/\delta)dt}{\int\limits_0^\delta v(t/\delta)dt}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Из этой теоремы вытекает

Теорема 3. *Для любых $\varphi \in \Phi$, $f \in B^2$-п.п., $\delta \ge \frac{7}{5\lambda_n}$*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{I(\varphi)}}\ \omega_\varphi(f,\delta).$$

Для функции $\varphi(t) = (4\sin^2(t/2))^2$, порождающей обычный модуль непрерывности m-го порядка, получаем

Следствие 1. *Для любой функции $f \in B^2$-п.п. при всех $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(f) < \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\omega_m\left(f, \frac{1,4\pi}{\lambda_n}\right).$$

Библиографические ссылки

1. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 / Н. И. Черных// Труды МИАН, 1967. — №88. — С. 71–74.
2. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 /Н. И. Черных// Матем. заметки, 1967. — Т. 2, № 5. — С. 513–522.
3. *Васильев С. Н.* Неравество Джексона-Стечкина в $L_2\left[-\pi,\pi\right]$ /С. Н. Васильев // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН, 2001. —Т.7, № 1. —С. 75–84.
4. *Степанец А. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p /А. И. Степанец , А. С. Сердюк //Укр. мат. журн, 2002. —Т.54, № 1. — С. 106–124.
5. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коеффициетами /С. Н. Васильев // Докл. РАН, 2002. —Т.385. № 1. — С. 11–14.
6. *Shapiro H. S.*Tauberian theorem related to approximation theory /H. S. Shapiro // Acta Math, 1968. — V. 120, — P. 279–292.
7. *Shapiro H. S., Boman J.*Comparison theorems for a generalized modulus of continuity /H. S. Shapiro, J. Boman // Arkiv for Matematik, 1971. — V. 9. № 1. — P. 91–116.
8. *Boman J.*Equivalence of generalized moduli of continuity /J. Boman // Arkiv for Matematik, 1980. — V. 18. № 1. — P. 73–100.
9. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 / А. Г. Бабенко // Мат. заметки, 1986. —Т. 39, № 5. —С. 651–664.
10. *Козко А.И.* О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности /А. И. Козко , А. В. Рождественский // Мат. заметки, 2003. — Т.73, № 5. —С. 783–788.
11. *Козко А. И.* О неравенстве Джексона с обощенным модулем непрерывности / А. И. Козко , А. В. Рождественский //Мат. сб., 2004. —Т.195, № 8. — С. 3–46.
12. *Притула Я. Г.*О неравенстве Джексона для B^2-почти периодических функций / Я. Г. Притула // Известия ВУЗов. Математика, 1972. —Т.123, № 8. —С. 90–93.
13. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Джексона-Стечкина для B^2-почти периодических функций /В. Ф. Бабенко ,С. В. Савела // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика, 2011. —В.19, № 6/1. —С. 8–14.
14. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. / Б. М. Левитан —М., 1953, — 396 с.
15. *Бредихина Е. А.* Почти периодические функции./Е. А. Бредихина // Математическая энциклопедия – М., 1984. —Т. 4. —С. 543–545.
16. *Бредихина Е.А.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций /Е. А. Бредихина // ДАН СССР, 1968. —Т.179, № 6. —С. 1023–1026.

Надійшло до редколегії 10.05.2012