УДК 517.5

О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций

С. Б. Вакарчук*, **М. Б. Вакарчук****

* Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля,
Днепропетровск 49000. *E-mail: sbvakarchuk@mail.ru*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: vacarchuk@yandex.ru*

Для аналiтичних в одиночному колi функцiй у просторi Бергмана B_2 отримано точну нерiвнiсть типу Колмогорова та наведено її застосування до задач теорiї апроксимацiї у комплекснiй площинi.

Ключовi слова: простiр Бергмана, промiжна похiдна, нерiвнiсть типу Колмогорова, найкраще полiномiальне наближення.

Для аналитических в единичном круге функций в пространстве Бергмана B_2 получено точное неравенство типа Колмогорова и приведено его приложение к задачам теории аппроксимации в комплексной плоскости.

Ключевые слова: пространство Бергмана, промежуточная производная, неравенство типа Колмогорова, наилучшее полиномиальное приближение.

Exact inequality of the Kolmogorov type is obtained in the Bergman space B_2 for functions analytic in the unit disk. The application of this inequality to problems of the theory of approximation in the complex plane is reduced too.

Key words: Bergman space, intermediate derivative, inequality of the Kolmogorov type, the best polynomial approximation.

Пусть U — круг единичного радиуса в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $A(U)$ — множество функций f, аналитических в U. Через B_2 обозначим пространство Бергмана (см., например, [1]), состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_U |f(z)|^2 dxdy \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^2 dt d\rho \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Для произвольного элемента $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j$ из B_2 в силу (1) имеем

$$\|f\| = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|c_j(f)|^2}{2(j+1)} \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Полагаем $\alpha_{j,r} := j(j-1)...(j-r+1)$; $j,r \in \mathbb{N}, j \geq r$. Под B_2^r, где $r \in \mathbb{N}$ и $r \geq 2$, понимаем множество функций $f \in A(U)$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}(z) = \sum\limits_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r}$ принадлежат пространству B_2 т. е.

$$\left\| f^{(r)} \right\| = \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \frac{\alpha_{j,r}^2 |c_j(f)|^2}{2(j-r+1)} \right\}^{1/2} < \infty. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что сама функция f и ее промежуточные производные $f^{(r-k)}$, где $k = \overline{1, r-1}$, также принадлежат пространству B_2.

Данная статья продолжает исследования авторов [2 – 3] и основным ее результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r, k \in \mathbb{N}$ и $r > k > 1$. Тогда для произвольной функции $f \in B_2^r$, у которой коэффициенты Тейлора $c_j(f) = 0$ при $j = r-k, ..., r-1$, справедливо неравенство*

$$\left\| f^{(r-k)} \right\| \leq \frac{\alpha_{r,r-k}(r+1)^{k/(2r)}}{\left(\alpha_{r,r}\right)^{1-k/r}(k+1)^{1/2}} \|f\|^{k/r} \left\| f^{(r)} \right\|^{1-k/r}. \tag{4}$$

При этом неравенство (4) является точным в том смысле, что существует функция $\varphi \in B_2^r$, которая обращает (4) в равенство.

Доказательство теоремы 1. Для произвольной функции $f \in B_2^r$, удовлетворяющей условию теоремы, ее промежуточная производная

$$f^{(r-k)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k},$$

принадлежащая пространству Бергмана B_2, имеет норму

$$\left\| f^{(r-k)} \right\| = \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \frac{\alpha_{j,r-k}^2 |c_j(f)|^2}{2(j-r+k+1)} \right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Представим равенство (5) следующим образом

$$\left\| f^{(r-k)} \right\|^2 = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^{2(1-k/r)} \left\{ \frac{|c_j(f)|^2}{2(j-r+1)} \right\}^{1-k/r} \left\{ \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} \right\}^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{|c_j(f)|^2}{2(j+1)} \right\}^{k/r} \left\{ \frac{(j-r+1)^{1-k/r}(j+1)^{k/r}}{j-r+k+1} \right\}. \tag{6}$$

Полагая

$$\psi_{r,k}(j) := \frac{\alpha_{j,r-k}(j-r+1)^{(r-k)/(2r)}(j+1)^{k/(2r)}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}(j-r+k+1)^{1/2}}, \tag{7}$$

из соотношения (6) с учетом обозначения (7) получаем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|^2 \le \left\{\sup_{j\ge r}\psi_{r,k}(j)\right\}^2 \sum_{j=r}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{j,r}^2|c_j(f)|^2}{2(j-r+1)}\right\}^{1-k/r}\left\{\frac{|c_j(f)|^2}{2(j+1)}\right\}^{k/r}. \qquad (8)$$

Применяя к правой части неравенства (8) неравенство Гельдера в случае $p = r/(r-k)$; $p' = r/k$, и используя формулы (2) - (3), имеем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\| \le \left\{\sup_{j\ge r}\psi_{r,k}(j)\right\}\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\frac{|c_j(f)|^2}{2(j+1)}\right\}^{k/(2r)}\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\frac{\alpha_{j,r}^2|c_j(f)|^2}{2(j-r+1)}\right\}^{(r-k)/(2r)} =$$

$$= \left\{\sup_{j\ge r}\psi_{r,k}(j)\right\}\|f\|^{k/r}\left\|f^{(r)}\right\|^{1-k/r}. \qquad (9)$$

Покажем справедливость равенства

$$\sup_{j\ge r}\psi_{r,k}(j) = \psi_{r,k}(r). \qquad (10)$$

Учитывая формулу (7), запишем

$$\psi_{r,k}(j) = \frac{\left\{(j+1)^{1/2}j(j-1)...(j-r+k+2)(j-r+k+1)^{1-r/(2k)}\right\}^{k/r}}{\left\{(j-r+k)...(j-r+2)(j-r+1)^{1/2}\right\}^{1-k/r}}. \qquad (11)$$

Исходя из равенств (10) - (11), рассмотрим вспомогательную функцию

$$\gamma(x) := \frac{\left\{(x+1)^{1/2}x(x-1)...(x-r+k+2)(x-r+k+1)^{1-r/(2k)}\right\}^{k/r}}{\left\{(x-r+k)...(x-r+2)(x-r+1)^{1/2}\right\}^{1-k/r}}, \qquad (12)$$

определенную для $r \le x < \infty$, и убедимся в том, что она является монотонно убывающей. Для этого вычислим ее логарифмическую производную, предварительно прологарифмировав обе части соотношения (12)

$$\ln\gamma(x) = \frac{k}{r}\Big\{\frac{1}{2}\ln(x+1) + \ln x + \ln(x-1) + ... + \ln(x-r+k+2) +$$

$$+\left(1-\frac{r}{2k}\right)\ln(x-r+k+1)\Big\} - \left(1-\frac{k}{r}\right)\Big\{\ln(x-r+k) + ... + \ln(x-r+2) +$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x-r+1)\Big\}. \qquad (13)$$

Из равенства (13) имеем

$$\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = \frac{k}{r}\left\{\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-r+k+2} + \left(1-\frac{r}{2k}\right)\frac{1}{x-r+k+1}\right\} -$$

$$-\left(1-\frac{k}{r}\right)\left\{\frac{1}{x-r+k}+...+\frac{1}{x-r+2}+\frac{1}{2(x-r+1)}\right\}. \qquad (14)$$

После замены в первых фигурных скобках правой части формулы (14) каждой функции $1/(x-j)$, где $j=-1,0,...,r-k-2$, большей функцией $1/(x-r+k+1)$, а во вторых фигурных скобках — каждой функции $1/(x-j)$, где $j=r-k+1,...,r-1$, меньшей функцией $1/(x-r+k)$, получаем

$$\frac{\gamma^{'}(x)}{\gamma(x)}<\frac{k}{r(x-r+k+1)}\left\{\frac{1}{2}+r\left(1-\frac{1}{2k}\right)-k\right\}-\frac{1}{x-r+k}\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{x-r+k}\left\{\frac{k}{r}\left(\frac{1}{2}+r\left(1-\frac{1}{2k}\right)-k\right)-\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\}=0. \qquad (15)$$

Поскольку, в силу формулы (12), $\gamma(x)>0$ при $r\leq x<\infty$, то из соотношения (15) имеем $\gamma^{'}(x)<0$ на полусегменте $[r,\infty)$, т. е. функция γ является монотонно убывающей. Следовательно, $\sup\{\gamma(x):r\leq x<\infty\}=\gamma(r)$ и равенство (10) имеет место. Очевидно, что неравенство (4) следует из соотношений (9) — (10) и (7).

Покажем, что неравенство (4) является точным в указанном в теореме 1 смысле. Для этого рассмотрим функцию $\varphi(z):=z^r$, принадлежащую множеству B_2^r и удовлетворяющую ограничению на коэффициенты Тейлора, сформулированному в рассматриваемой теореме. Поскольку $\varphi^{(r)}(z)=\alpha_{r,r}$ и $\varphi^{(r-k)}(z)=\alpha_{r,r-k}z^k$ то на основании формул (2) — (3) и (5) запишем

$$\|\varphi\|=\frac{1}{\sqrt{2(r+1)}};\quad \|\varphi^{(r)}\|=\frac{\alpha_{r,r}}{\sqrt{2}};\quad \|\varphi^{(r-k)}\|=\frac{\alpha_{r,r-k}}{\sqrt{2(k+1)}}. \qquad (16)$$

Подставляя в (4) вместо $f,f^{(r)}$ и $f^{(r-k)}$ соответственно $\varphi,\varphi^{(r)}$ и $\varphi^{(r-k)}$ и используя соотношения (16), убеждаемся в том, что неравенство (4) обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим применение результатов, полученных в теореме 1, к теории аппроксимации аналитических функций комплексного переменного. Символом $\mathcal{P}_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, обозначим подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного z степени, не превосходящей n. Для функции $f\in B_2$ символом $E_{n-1}(f)$, $n\in\mathbb{N}$, обозначим величину её наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства B_2, т. е. $E_{n-1}(f):=\inf\{\|f-p_{n-1}\|:p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}$. Полином $p^*_{n-1}(f)\in\mathcal{P}_{n-1}$, для которого $E_{n-1}(f)=\|f-p^*_{n-1}(f)\|$, называют полиномом наилучшего приближения функции $f\in B_2$. Покажем, что для функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\in B_2$ имеем $p^*_{n-1}(f)=T_{n-1}(f)$, где $T_{n-1}(f,z):=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k(f)z^k$ — полином Тейлора $(n-1)$-го порядка для рассматриваемого элемента f из пространства B_2. Рассмотрим в B_2 скалярное произведение

$$<f,g>:=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_U f(z)\overline{g(z)}dxdy,$$

где $f, g \in B_2$, переводящее B_2 в гильбертово пространство (см. например, [4, с. 196-197]) . В силу (1) очевидно равенство $< f, f >= \|f\|^2$. Нетрудно убедиться в том, что система функций $\{z^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ является ортогональной по области U, так как для любых $k, j \in \mathbb{Z}_+$ выполнено соотношение $< z^k, z^j >= \{0,\ \text{если}\ k \neq j;\ \ 1/(2(k+1)),\ \text{если}\ k = j\}$.

Пусть $p_{n-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, где $a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{0, n-1}$, есть произвольный многочлен из $\mathcal{P}_{n-1}$. Тогда для функции $f \in B_2$ имеем

$$\|f - p_{n-1}\|^2 =< f - p_{n-1}, f - p_{n-1} >= \|f\|^2 - < p_{n-1}, f > - < f, p_{n-1} > + \|p_{n-1}\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{2\pi} \iint\limits_U z^k \overline{f(z)} dxdy - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_U f(z) \overline{z}^k dxdy + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|^2}{2(k+1)} =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\overline{c_k(f)}}{2(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a}_k \frac{c_k(f)}{2(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|^2}{2(k+1)} =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|c_k(f)|^2}{2(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|c_k(f) - a_k|^2}{2(k+1)}. \tag{17}$$

Очевидно, что правая часть равенства (17) принимает наименьшее значение в случае $a_k = c_k(f),\ k = \overline{0, n-1}$, т. е.

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{2(k+1)} \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $r, k \in \mathbb{N}$ и $r > k > 1$. Тогда для произвольной функции $f \in B_2^r$ и любого натурального числа $n > r$ справедливо неравенство*

$$E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right) \leq \frac{\alpha_{n,r-k}(n-r+1)^{(r-k)/(2r)}(n+1)^{k/(2r)}}{\left(\alpha_{n,r}\right)^{1-k/r}(n-r+k+1)^{1/2}} \times$$

$$\times \left(E_{n-1}(f)\right)^{k/r} \left(E_{n-r-1}\left(f^{(r)}\right)\right)^{1-k/r}. \tag{19}$$

которое является точным в указанном в теореме 1 смысле.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольную функцию

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j$$

из множества B_2^r, для которой полагаем

$$e_n(f, z) := f(z) - T_{n-1}(f, z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j(f) z^j. \tag{20}$$

Очевидно, что функция $e_n(f)$ также принадлежит B_2^r. Из равенств (18) и (20) получаем

$$\|e_n(f)\| = E_{n-1}(f). \tag{21}$$

Пусть $1 \le \mu \le n-1$, где $n, \mu \in \mathbb{N}$ и $n \ge 2$. Путем непосредственных вычислений можно убедиться в справедливости равенства

$$T^{(\mu)}(f, z) = T_{n-\mu-1}\left(f^{(\mu)}, z\right). \tag{22}$$

Используя соотношения (20) и (22) для $n > r > k > 1$ получаем:

$$e_n^{(r-k)}(f, z) = \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k} =$$

$$= f^{(r-k)}(z) - T_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}, z\right) = e_{n-r+k}\left(f^{(r-k)}, z\right); \tag{23}$$

$$e_n^{(r)}(f, z) = \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r} = f^{(r)}(z) - T_{n-r-1}\left(f^{(r)}, z\right) = e_{n-r}\left(f^{(r)}, z\right). \tag{24}$$

Учитывая формулы (18), (21) и (23) - (24), имеем:

$$\|e_n^{(r-k)}(f)\| = E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right), \tag{25}$$

$$\|e_n^{(r)}(f)\| = E_{n-r-1}\left(f^{(r)}\right). \tag{26}$$

Применяя, практически дословно, ход доказательства теоремы 1 к функции $e_n(f)$ и учитывая, что в данном случае величины $\psi_{r,k}(j)$, задаваемые формулой (7), рассматриваются для всех натуральных $j \ge n > r$, запишем

$$\|e_n^{(r-k)}(f)\| \le \frac{\alpha_{n,r-k}(n-r+1)^{(r-k)/(2r)}(n+1)^{k/(2r)}}{(\alpha_{n,r})^{1-k/r}(n-r+k+1)^{1/2}} \times$$

$$\times \|e_n(f)\|^{k/r} \|e_n^{(r)}(f)\|^{1-k/r}. \tag{27}$$

Требуемое неравенство (19) получаем из соотношения (27), используя равенства (21) и (25) - (26).

Покажем неулучшаемость неравенства (19). Для этого рассмотрим функцию $\varphi_1(z) := z^n$, где $n > r$, принадлежащую множеству B_2^r. Очевидно, что $\varphi_1^{(r-k)}(z) = \alpha_{n,r-k} z^{n-r+k}$ и $\varphi_1^{(r)}(z) = \alpha_{n,r} z^{n-r}$. С учетом формулы (18) имеем:

$$E_{n-1}(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}; \quad E_{n-r+1}\left(\varphi_1^{(r)}\right) = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{2(n-r+1)}}, \tag{28}$$

$$E_{n-r+k-1}\left(\varphi_1^{(r-k)}\right) = \frac{\alpha_{n,r-k}}{\sqrt{2(n-r+k+1)}}. \tag{29}$$

Подставляя в левую и правую части неравенства (19) вместо f, $f^{(r-k)}$ и $f^{(r)}$ соответственно φ_1, $\varphi_1^{(r-k)}$ и $\varphi_1^{(r)}$ и используя формулы (28) - (29), убеждаемся в том. что рассматриваемое соотношение обратится в равенство. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что, следуя работе авторов [3], можно распространить полученные результаты на случай аналитических функций двух комплексных переменных.

Библиографические ссылки

1. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов // Мат. сборник, 2010. — Т. 201, № 8. — С. 3–22.
2. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // С. Б. Вакарчук // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. Сб. научн. трудов. — К., 1988. — С. 4—7.
3. *Вакарчук С. Б.* О мультипликативных неравенствах типа Харди-Литтльвуда-Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Серiя: "Математика 2010. — Т. 18, № 6/1. — С. 81–87.
4. *Смирнов В. И.* Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. — М.-Л., 1964. — 438 с.

Надiйшло до редколегiї 01.09.2012