УДК 517.5

К вопросу о взаимном уклонении некоторых квадратурных сумм интерполяционного типа

В. Л. Великин

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: velikiny@rambler.ru*

Отримано ефективні обчислювальні формули для квадратурних сум, що оптимальні за коефіцієнтами, при довільно розташованих вузлах, на деяких класах диференційованих функцій, і на основі цього знайдено точні значення взаємного відхилення квадратурних сум інтерполяційного типу.

Ключові слова: квадратурна сума, сплайн, інтерполяція.

Получены эффективные вычислительные формулы для квадратурных сумм, которые оптимальны по коэффициентам, при произвольно расположенных узлах, на некоторых классах дифференцируемых функций, и на основании этого найдены точные значения взаимного уклонения квадратурных сумм интерполяционного типа.

Ключевые слова: квадратурная сумма, сплайн, интерполяция.

We obtained efficient computational formulae for quadrature sums that are optimal with respect to coefficients for arbitrary distribution of knots for certain classes of differentiable functions. Based on this, we found exact values of mutual deviation of interpolatory type quadrature sums.

Key words: quadrature sums, spline, interpolation.

Пусть C^q, $q = 0, 1, 2, ...,$ — линейное пространство функций $f(x)$, имеющих на промежутке $[0, 1]$ q непрерывных производных. Пусть еще

$$\Delta_n = \{x_i\}_{i=0}^n, 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,$$

— произвольное разбиение промежутка $[0, 1]$ узлами x_i.

Положим

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \delta_i^n = [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad \delta^n = max\{h_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Каждой функции $f \in C^q$ поставим в соответствие интерполяционный сплайн вида

$$s_{r,m}(f, \Delta_n; x) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(x_{i-1}) H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f^{(k)}(x_i) H_{k,m}(h_i; x_i - x),$$

© В. Л. ВЕЛИКИН

$m = 0, 1, 2, ...,\quad x \in \delta_i^n,\quad i = \overline{1, n},\quad q, m \geq r,$ где [1] (см. также [2])

$$H_{k,m}(h,t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^{k+s}. \tag{1}$$

Заметим, что алгебраический многочлен $H_{k,m}(h,t)$ степени $2m+1$ однозначно определяется своими значениями [1] на концах промежутка$[0,h]$:

$$H_{k,m}^{(\nu)}(h,0) = 1, \text{если } \nu = k, \text{ и } 0, \text{если } \nu \neq k,\ H_{k,m}^{(\nu)}(h,h) = 0, \nu = \overline{0,m}. \tag{2}$$

Как и в [3], здесь мы рассматриваем квадратурные суммы

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{n} p_{k,i}^m f^{(k)}(x_i) = \int_0^1 s_{r,m}(f, \Delta_n; x) dx, \tag{3}$$

где

$$p_{k,0}^m = a_{k,1}^m,\quad p_{k,i}^m = (-1)^k a_{k,i}^m + a_{k,i+1}^m,\quad i = \overline{1, n-1},\quad p_{k,n}^m = (-1)^k a_{k,n}^m, \tag{4}$$

$$a_{k,i}^m = \int_0^{h_i} H_{k,m}(h_i, t) dt, \qquad k = \overline{0,r}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Квадратурные суммы (3) при $r = m$ и произвольном фиксированном множестве узлов Δ_n являются наилучшими по коэффициентам (см., напр., [4, теорема 5.18.4]) на классах W_2^{m+1} функций f из C^m , у которых $f^{(m)}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $||f^{(m+1)}||_{L_2(0,1)} \leq 1$, среди всех квадратурных сумм С.М. Никольского [5] вида

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{n} p_{k,i} f^{(k)}(x_i).$$

В данной работе мы исследуем величину

$$I_{r,m}(f, \Delta_n) = |\int_0^1 s_{r,m}(f, \Delta_n; x) dx - \int_0^1 s_{r-1,m}(f, \Delta_n; x) dx| \tag{6}$$

взаимного уклонения квадратурных сумм (3). Ясно, что $I_{r,m}(f, \Delta_n)$ представляет собой абсолютное значение разности погрешностей двух квадратурных формул, построенных по квадратурным суммам вида (3).

Используя соотношения (3-4) и (6), имеем

$$I_{r,m}(f, \Delta_n) = |\sum_{i=0}^{n} (a_{r,i+1}^m + (-1)^r a_{r,i}^m) f^{(r)}(x_i)|,\quad a_{r,0}^m = a_{r,n+1}^m = 0. \tag{7}$$

Следующие утверждения позволят получить эффективные вычислительные формулы для коэффициентов $a_{k,i}^m$ и, как следствие, значения $I_{r,m}(f, \Delta_n)$.

Положим

$$\omega_{k,m}(h;t) = H_{k,m}(h;t) + H_{k,m}(h; h-t). \tag{8}$$

Функция $\omega_{k,m}(h;t)$ представляет собой алгебраический многочлен степени $2m$.

Лемма 1. *Имеет место следующее тождество:*

$$\omega_{k,m}(h;t) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{m}\frac{(2j-k-1)!}{j!(j-k)!h^{2j-k}}T^j(h;t), \quad T(h;t) = t(h-t), \ m \geq k \geq 1. \quad (9)$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\omega_{k,m+1}(h;t) = \omega_{k,m}(h;t) + \lambda_{k,m}T^{m+1}(h;t), \quad \lambda_{k,m} \in \mathbf{R}. \quad (10)$$

Действительно, левая и правая части (10) представляют собой алгебраические многочлены степени $2m+2$, симметричные относительно $t = h/2$, и при любом $\lambda_{k,m}$, с учетом равенств (2),

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}(\omega_{k,m+1}(h;t))|_{t=0,h} = \frac{d^\nu}{dt^\nu}(\omega_{k,m}(h;t) + \lambda_{k,m}T^{m+1}(h;t))|_{t=0,h}, \quad \nu = \overline{0,m}. \quad (11)$$

Кроме того, с учетом (8) и (2)

$$\omega_{k,m+1}^{(m+1)}(h;0) = \omega_{k,m+1}^{(m+1)}(h;h) = 0, \quad k \leq m,$$

а

$$\omega_{k,m}^{(m+1)}(h;0) = (-1)^{m+1}\omega_{k,m}^{(m+1)}(h;h)$$

и

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(T^{m+1}(h;t))|_{t=0} = (-1)^m\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(T^{m+1}(h;t))|_{t=h},$$

т. е. за счет выбора коэффициента $\lambda_{k,m}$ равенства (11) справедливы и при $\nu = m+1$. Откуда и следует тождество (10).

Далее рассуждаем индукцией по $m = k, k+1, \ldots$. При $m = k$ из (1) имеем

$$\omega_{k,k}(h;t) = \frac{1}{k!h^k}T^k(h;t),$$

т. е. соотношение (9) при $m = k$. Предположим, что соотношение (9) имеет место при данном m, и докажем его для следующего m. Из равенств (1) получаем

$$\omega_{k,m+1}(h;t) = \frac{1}{k!(m+1)!}\sum_{s=0}^{m+1-k}\frac{(m+1-s)!}{s!h^{m+2+s}}T^{k+s}((h-t)^{m+2-k-s} + t^{m+2-k-s}).$$

Выделим в правой части этого равенства слагаемые, содержащие T^{m+1}. Это слагаемые с $j = m$ и $j = m+1$. А именно,

$$\frac{1}{k!(m+1)!}(\frac{(2m+1-k)!}{(m-k)!H^{2m+2-k}}T^m((h-t)^2 + t^2) + \frac{(2m+2-k)!}{(m+1-k)!h^{2m+2-k}}T^{m+1}).$$

Откуда получаем значение коэффициента $\lambda_{k,m}$ в тождестве (10)

$$\lambda_{k,m} = \frac{k(2m+1-k)!}{(m+1-k)!h^{2m+2-k}},$$

а вместе с ним и равенство (9) с заменой m на $m+1$, что и доказывает тождество (9) при любом $m \geq k, \quad k = 1, 2, ... \quad$.

Лемма 2. *Справедливо следующее тождество:*

$$\frac{d}{dt}H_{0,j}(h;t) = -\frac{(2j+1)!}{(j!)^2 h^{2j+1}}T^j(h;t) \tag{12}$$

и, как следствие, равенство

$$\int_0^h T^j(h;t)dt = \frac{(j!)^2 h^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{13}$$

Доказательство. Левая и правая части (12) - это алгебраические многочлены степени $2j$, которые вместе со своими производными до $(j-1)$-го порядка включительно на концах промежутка $[0,h]$ принимают нулевые значения. Следовательно, $\frac{d}{dt}H_0(h;t) = \lambda_j T^j$. Коэффициент λ_j находим, приравнивая производные $2j$-го порядка от левой и правой частей этого равенства.

Из лемм 1 и 2 получаем для $k \geq 1$

$$\int_0^h H_{k,m}(h;t)dt = \frac{1}{2}\int_0^h \omega_{k,m}(h;t)dt = c_{k,m}h^{k+1}, \tag{14}$$

Заметим, что $\int_0^h H_{0,m}(h;t)dt = h/2$, поскольку, с учетом равенств (2) при $k = 0$, $\omega_{0,m}(h;t) \equiv 1$.

Положим $H_{k,\infty}(h;t) = \lim_{m\to\infty} H_{k,m}(h;t)$ и воспользуемся для $H_{k,\infty}(h;t)$ равенствами из [6]:

$$H_{k,\infty}(h;t) = \frac{t^k}{k!}, \quad t \in [0, \frac{h}{2}), \quad H_{k,\infty}(h; \frac{h}{2}) = \frac{h^k}{2^{k+1}k!}, \quad H_{k,\infty}(h;t) = 0, \quad t \in (\frac{h}{2}, h].$$

Отметим несколько частных случаев, вытекающих из (13):

$$a_{1,i}^m = \int_0^{h_i} H_{1,m}(h_i;t)dt = \frac{h_i^2}{4}\sum_{j=1}^m \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{h_i^2}{8}(1 - \frac{1}{2m+1}) = \frac{m}{4(2m+1)}h_i^2,$$

$$a_{1,i}^m \to \frac{h_i^2}{8} = \int_0^{h_i} H_{1,\infty}(h_i;t)dt, \quad m \to \infty.$$

Аналогично,

$$a_{2,i}^m = \frac{m-1}{24(2m+1)}h_i^3 \to \frac{h_i^3}{48}, \quad a_{3,i}^m = \frac{(m-2)(m-1)}{96(4m^2-1)}h_i^4 \to \frac{h_i^4}{384},$$

$$a_{4,i}^m = \frac{(m-3)(m-2)}{960(4m^2-1)} h_i^5 \to \frac{h_i^5}{3840},\ m \to \infty, \dots, a_{m,i}^m = \frac{m!}{2(2m+1)!} h_i^{m+1}, i = \overline{1,n}.$$

Лемма 3. *При любых $k \le m$ и $t \in [0, h/2]$ имеют место неравенства*

$$H_{k,m}(h;t) \le H_{k,\infty}(h;t).$$

Доказательство. Из равенств (1) получаем

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{t^k (h-t)^{m+1}}{k!m!} \Big(\sum_{s=0}^{m} - \sum_{s=m-k+1}^{m}\Big)\Big(\frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^s\Big) =$$

$$= \frac{t^k}{k!} H_{0,m}(h;t) - \frac{t^k (h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=m-k+1}^{m} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^s.$$

Откуда, для $t \in [0, h/2]$ имеем

$$H_{k,m}(h;t) \le \frac{t^k}{k!} H_{0,m}(h;t) \le \frac{t^k}{k!} = H_{k,\infty}(h;t).$$

Следовательно,

$$\omega_{k,m}(h;t) \le \frac{t^k}{k!}, \quad t \in [0, h/2), \quad \omega_{k,m}(h;t) \le \frac{(h-t)^k}{k!}, \quad t \in (h/2, h],$$

а значит

$$\int_0^h H_{k,m}(h;t)dt = \frac{1}{2}\int_0^h \omega_{k,m}(h;t)dt \le \frac{h^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} = \lim_{m\to\infty} \int_0^h H_{k,m}(h;t)dt.$$

Доказанные выше вспомогательные утверждения позволяют получить точные значения для

$$I_{r,m}(\Delta_n) = \sup\{I_{r,m}(f, \Delta_n) : f \in C^r[0,1],\ ||f^{(r)}||_{C[0,1]} \le 1\}.$$

Теорема 1. *Для любых r, m и Δ_n имеют место равенства*

$$I_{r,m}(\Delta_n) = c_{r,m}\eta_r(\Delta_n), \tag{15}$$

где

$$\eta_r(\Delta_n) = h_1^{k+1} + \sum_{i=1}^{n-1} |h_{i+1}^{k+1} + (-1)^k h_i^{k+1}| + h_n^{k+1}.$$

В частности, для множества $\overline{\Delta}_n$ равноотстоящих узлов

$$I_{r,m}(\overline{\Delta}_n) = \tfrac{2c_{r,m}}{n^r},\ r \text{ – четное}, \qquad I_{r,m}(\overline{\Delta}_n) = \tfrac{2c_{r,m}}{n^{r-1}},\ r \text{ – нечетное}.$$

Доказательство теоремы. Утверждение теоремы вытекает из соотношений (7), (5), (14) и (9), а конструкция экстремальной функции очевидна.

В заключение отметим несколько частных случаев для значений $I_{r,m}(\Delta_n)$:

$$I_{1,m}(\Delta_n) = \frac{m}{4(2m+1)}\eta_1(\Delta_n), \qquad I_{1,m}(\overline{\Delta}_n) = \frac{m}{2(2m+1)} \cdot \frac{1}{n^2},$$

$$I_{2,m}(\Delta_n) = \frac{m-1}{12(2m+1)}\sum_{i=1}^{n} h_i^3, \qquad I_{2,m}(\overline{\Delta}_n) = \frac{m-1}{12(2m+1)} \cdot \frac{1}{n^2},$$

$$I_{3,m}(\Delta_n) = \frac{(m-2)(m-1)}{48(4m^2-1)}\eta_3(\Delta_n), \qquad I_{3,m}(\overline{\Delta}_n) = \frac{(m-2)(m-1)}{24(4m^2-1)} \cdot \frac{1}{n^4},$$

$$I_{4,m}(\Delta_n) = \frac{(m-3)(m-2)}{480(4m^2-1)}\sum_{i=1}^{n} h_i^5, \qquad I_{4,m}(\overline{\Delta}_n) = \frac{(m-3)(m-2)}{480(4m^2-1)} \cdot \frac{1}{n^4}, \quad \ldots,$$

$$I_{m-1,m}(\Delta_n) = \frac{(m+2)!}{(2m+1)!}\eta_{m-1}(\Delta_n), \qquad I_{m,m}(\Delta_n) = \frac{m!}{(2m+1)!}\eta_m(\Delta_n).$$

Библиографические ссылки

1. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций / В. Л. Великин // ИАН СССР. Серия математическая, 1971. — Т. 35, №1. — С. 93–124.
2. *Великин В. Л.* Точные оценки приближения сплайн-функциями на классах дифференцируемых функций / В. Л. Великин, Н. П. Корнейчук // Математические заметки, 1971. —Т. 9, №5, — С. 483–494.
3. *Великин В. Л.* Эрмитовы сплайны и связанные с ними квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций / В. Л. Великин // Известия высших учебных заведений. Математика, 1976. — Т. 168, №5. — С. 15–28.
4. *Алберг Дж.* Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш — М., 1972. — 316 с.
5. *Никольский С.. М.* Квадратурные формулы / С.М. Никольский — М., 1974. — 223 с.
6. *Великин В. Л.* Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов / В. Л. Великин // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Серія: «Математика», 2009. — Т. 17, № 6/1. — С. 42–47.

Надійшло до редколегії 01.09.2012