ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2012, вип.* **17**

УДК 517.5

Наближення функцій алгебраїчними многочленами у середньому

В. П. Моторний, М. С. Клименко
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050.
E-mail: motornyiVP@yandex.ru E-mail: margarita.klimenko@gmail.com

Отримано оцінки для наближення поліномами функцій із заданою мажорантою модуля неперервності в інтегральній метриці.

Ключові слова: модуль неперервності, теорема Джексона.

Получены оценки для приближения полиномами функций с заданной мажорантой модуля непрерывности в интегральной метрике.

Ключевые слова: модуль непрерывности, теорема Джексона.

Estimates for approximation of functions with given majorant of modulus of continuity by polinomials in integral metrics were estalished.

Key words: modulus of continuity, Jackson theorem.

Для довільного модуля неперервності ω і $1 \le p < \infty$ позначимо через H_p^ω клас функцій $f \in L_p$, для яких при всіх $h \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(-1,1-h)} \le \omega(h).$$

Для $r \in \mathbb{N}$, довільного модуля неперервності ω і $1 \le p < \infty$ позначимо через $W^r H_p^\omega$ клас функцій $f \in C$, що мають абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$, таку, що $f^{(r)} \in H_p^\omega$.

Класи $W^r H_p^\omega$ досліджували, зокрема, Г.К. Лебедь [1], М.К. Потапов $[2-5]$, В.П. Моторний [6].

У 1971 році В.П. Моторний довів наступну теорему.

Теорема А [6]. *Нехай задано $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $\omega(t) = t^\alpha$ і функція $f(x) \in W^r H_p^\omega$ $(1 \le p < \infty)$. Тоді існує константа $C = C_r$, яка залежить тільки від r, така що для кожного $n \ge r$ знайдеться алгебраїчний многочлен степеня не вище n, що задовольняє нерівності*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r+\alpha}} \right\|_p \le C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r+\alpha}}.$$

Одним з головних результатів данної роботи є наступна теорема, що є узагальненням теореми А.

Теорема 1. *Нехай задано $r \in \mathbb{N}$, модуль неперервності $\omega(t)$, такий, що функкія $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає, і функція $f(x) \in W^r H_p^\omega$ $(1 \le p < \infty)$. Тоді існує константа $C = C_r$, яка залежить тільки від r, така що для кожного $n \ge r$ знайдеться алгебраїчний многочлен степеня не вище n, що задовольняє нерівності*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2})\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r} \right\|_p \le C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^r}.$$

Зауваження. З опуклості вгору функції $\omega(t)$ випливає що функкія $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає.

Доведення теореми 1. Розіб'ємо відрізок $[-1; 1]$ на рівні частини довжини $\frac{1}{n}$ і позначимо точки розбиття через $x_{n,i}, i = 0, 1, ..., 2n \,(x_{n,0} = -1, x_{n,2n} = 1)$. На кожному відрізку $[x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ розглянемо середнє значення функції $f(x) \in H_p^\omega$:

$$L_{n,i} = n \int\limits_{x_{n,i-1}}^{x_{n,i}} f(t)dt.$$

Нехай, далі,

$$F_n(f; x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \Theta_j(x) \Delta L_{n,j}, \tag{1}$$

де $\Theta_j(x) = \Theta(x - x_{n,j})$, $\Theta(x) = 1$, якщо $x \ge 0$ і $\Theta(x) = 0$, якщо $x < 0$, $\Delta L_{n,j} = L_{n,j+1} - L_{n,j}$ $(L_{n,0} = 0)$. Рівність (1) кожній функції $f(x) \in H_p^\omega$ ставить у відповідність кусково-сталу функцію, що дорівнює середньому значенню функції $f(x)$ на кожному інтервалі $(x_{n,i-1}, x_{n,i})$.

Для доведення теореми 1 нам знадобляться допоміжні результати. Наступна теорема була доведена у роботі [6] (див. теорему 1).

Теорема 2. *Для довільних модуля неперервності ω, функції $f \in H_p^\omega$ $(1 \le p < \infty)$ і цілого $n > 0$ має місце нерівність*

$$\|f(x) - F_n(f; x)\|_{L_p} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Для будь-якого цілого $n > 0$ розглянемо точки $\alpha_i \in [0, 1]$ такі, що:

a) $\alpha_0 = 0, \alpha_{i+1} = \alpha_i + \dfrac{K_i}{n2^i}$,

b) $\sqrt{1 - \alpha_i^2} > \dfrac{1}{2^i}$,

c) $\sqrt{1 - \left(\alpha_i + \dfrac{1}{n2^i}\right)^2} \le \dfrac{1}{2^i}, i = 1, 2, ..., [\log_2 n]$,

де K_i- цілі додатні числа. Покладемо $\alpha_{-i} = -\alpha_i$. Обравши числа α_i таким чином, розіб'ємо кожен відрізок $[\alpha_i, \alpha_{i+1}](\alpha_{[\log_2 n]+1} = 1)$ на частини, довжини яких дорівнюють $\dfrac{1}{n2^i}$. Нові точки ділення разом з точками α_i позначимо через $x_i(x_i < x_{i+1}), i = 0, 1, ..., N$. Нехай $E_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \bigcup [\alpha_{-(k+1)}, \alpha_{-k}]$.

Покладемо $\tilde{F}_n(f; x) = F_{n2^k}(f; x)$ для $x \in E_k$.

Зауваження 1. Із означення точок a_k і x_i випливає, що:

1. $\frac{1}{2^i} < \sqrt{1 - a_i^2} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$.
2. $\frac{1}{2n} < \tau_i - \tau_{i+1} < \frac{1}{n}$, якщо $\cos \tau_i = x_i$, $\cos \tau_{i+1} = x_{i+1}$, $x_i, x_{i+1} \in [a_k, a_{k+1}]$.

Дійсно, нерівності 1 випливають з означення. Для доведення нерівностей 2 скористаємось теоремою Лагранжа: $x_{i+1} - x_i = \cos \tau_i - \cos \tau_{i+1} = \sin \tau_i^* (\tau_i - \tau_{i+1})$, де $\tau_i^* \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, а отже $\sin \tau_i^* \in \left(\sqrt{1 - a_{k+1}^2}, \sqrt{1 - a_k^2} \right)$. Звідси отримуємо, що $\sqrt{1 - a_{k+1}^2} (\tau_i - \tau_{i+1}) < x_{i+1} - x_i < \sqrt{1 - a_k^2} (\tau_i - \tau_{i+1})$. Тепер застосовуючи доведені нерівності 1 і той факт, що $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n2^k}$ приходимо до необхідних нерівностей.

Зауваження 2. Із означення точок a_k і x_i та зауваження 1 випливає, що якщо $x_i, x_j \in [a_k, a_{k+1}]$, то

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\sqrt{1 - x_i^2}}{\sqrt{1 - x_j^2}} \leq 4.$$

Зауваження 3. Із зауваження 2 випливає, що якщо $x_i, x_j \in [a_k, a_{k+1}]$, $\cos \tau_i = x_i$, $\cos \tau_j = x_j$, $\omega(t)$ — модуль неперервності, для якого функція $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає, то

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\omega\left(\frac{\sin \tau_i}{n}\right)}{\omega\left(\frac{\sin \tau_j}{n}\right)} \leq 4.$$

Наступна теорема є узагальненням теореми 5 роботи [6].

Теорема 3. *Для довільних модуля неперервності ω, функції $f(x) \in H_p^\omega$ і цілого $n > 0$ має місце нерівність*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - \tilde{F}_n(f; x)}{\omega\left(\sqrt{1 - x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \leq C \ln n.$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 5 роботи [6].

Наступна теорема є узагальненням теореми 6 роботи [6].

Теорема 4. *Для довільних модуля неперервності ω, такого, що функція $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає, функції $f(x) \in H_p^\omega$ і цілого $n > 0$ існує поліном $P_n(x)$ степеня $2mn$ такий, що виконується нерівність*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{\tilde{F}_n(f; x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1 - x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \leq C \ln n,$$

де ціле число m залежить тільки від ω та p.

Для доведення тереми 4 нам знадобиться наступна лема [7].

Лема 1. *Існує алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня $\leq 2mn$ такий, що для кожного $x, z \in [-1, 1]$ має місце нерівність*

$$|\Theta_z(x) - P_n(x)| \leq \frac{A(m)}{(n|\arccos x - \arccos z| + 1)^{2m-1}},$$

де $\Theta_z(x)-$ зсув вправо функції Хевісайда $\Theta(x)$ на величину z, а $m-$ фіксоване ціле число. Постійна $A(m)$ залежить від m.

Доведення теореми 4. Нехай $x_i = x_{i,n}-$ точки відрізку $[-1;1]$, що були визначені раніше. Для кожного n розглянемо алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище $2mn$ (m - фіксоване число)

$$P_n(x) = \sum_j P_{x_j}(x)\Delta\tilde{L}_{n,j},$$

де $P_{x_j}(x)-$ ті ж самі многочлени, що і у лемі 1, а

$$\Delta\tilde{L}_{n,j} = \frac{1}{\Delta x_j}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_{j-1}}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)dt, \Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Тоді

$$\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{\tilde{F}_n(f;x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O\left(\left\{\sum_i \omega^{-p}\left(\sqrt{1-x_i^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_j(\Theta_j(x) - P_{x_j}(x))\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right).$$

Для того, щоб оцінити праву частину останньої нерівності розглянемо два випадки.

1. Нехай $p = 1$. Покладемо $x_{i,n} = \cos\tau_{i,n}$. Використовуючи лему 1 прийдемо до співвідношення

$$\sum_i \omega^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_j(\Theta_j(x) - P_{x_j}(x))\Delta\tilde{L}_{n,j}\right| dx =$$

$$= O\left(\sum_i\sum_j \omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}|\Delta\tilde{L}_{n,j}|\frac{1}{(n|\tau_i - \tau_{j,n}| + 1)^{2m-1}}\right).$$

Тепер використовуючи нерівність

$$\sin\tau_{i,n} \leq \sin\tau_{j,n} + |\tau_{i,n} - \tau_{j,n}|, \tag{2}$$

якщо $\sin\tau_{i,n} > \sin\tau_{j,n}$, та незростання функції $\frac{\omega(t)}{t}$, отримаємо

$$\sum_i\sum_j \omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}|\Delta\tilde{L}_{n,j}|\frac{1}{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}} =$$

$$= \sum_j \frac{|\Delta\tilde{L}_{n,j}|}{n}\left\{\sum_{\sin\tau_{i,n}\le\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)\right\} =$$

$$= O\left(\sum_j \frac{|\Delta\tilde{L}_{n,j}|}{n}\left\{\sum_i \frac{\sin\tau_{j,n}}{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_i \frac{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)}{n(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)\right\}\right).$$

Оцінюючи зверху внутрішню сумму сумою ряду за всіма натуральними i (враховуючи зауваження 1) при $m > \frac{3}{2}$ отримуємо

$$\sum_j \frac{|\Delta\tilde{L}_{n,j}|}{n}\left\{\sum_i \frac{\sin\tau_{j,n}}{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_i \frac{(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)}{n(n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|+1)^{2m-1}}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)\right\} =$$

$$= O\left(\sum_j \frac{|\Delta\tilde{L}_{n,j}|}{n}\sin\tau_{j,n}\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)\right).$$

2. Нехай тепер $p > 1$. Використовуючи нерівність Гельдера, одержимо:

$$\left\{\sum_i \omega^{-p}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\sum_j(\Theta_j(x)-P_{x_j}(x))\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O\left(\left\{\sum_i \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\left(\sum_j \frac{\left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{2m-1}}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right) =$$

$$= O\left(\left\{\sum_i \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\right)\frac{\sin\tau_{i,n}}{n}\left(\sum_j \frac{\left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|^p}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}}\right)^{\frac{1}{p}p}\right.\right.$$

$$\cdot \left(\sum_j \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}q}} \right)^{\frac{p}{q}} \Bigg\} ^{\frac{1}{p}} \Bigg) =$$

$$= O\left(\left\{ \sum_j \left| \Delta \tilde{L}_{n,j} \right|^p \sum_i \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \right).$$

Використовуючи неспадання функції ω та нерівність (2) отримаємо

$$\sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \leq$$

$$\leq \sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}+|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|}{n} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \leq$$

$$\leq C\omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}}{n}.$$

Застосовуючи спадання функції $\frac{\omega(t)}{t}$ та нерівність

$$\frac{1}{\sin\tau_{i,n}} \leq \frac{1}{\sin\tau_{j,n}} + \frac{|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|}{\sin\tau_{i,n}\sin\tau_{j,n}} \tag{3}$$

отримаємо

$$\sum_{\sin\tau_{i,n}\leq\sin\tau_{j,n}} \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right) \cdot \frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \cdot \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} =$$

$$= \sum_{\sin\tau_{i,n}\leq\sin\tau_{j,n}} \left(\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right)^p \left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{n} \right)^{1-p} \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \leq$$

$$\leq n^{p-1} \sum_{\sin\tau_{i,n}\leq\sin\tau_{j,n}} \left(\omega^{-1}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right)^p \left(\frac{1}{\sin\tau_{i,n}} \right)^{p-1} \frac{1}{(1+n|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|)^{\frac{2m-1}{2}p}} \leq$$

$$\leq C\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right).$$

Таким чином для довільного $1 \leq p < \infty$ приходимо до оцінки

$$\left\{ \int_{-1}^{1} \left| \frac{\tilde{F}_n(f;x)-P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\left\{ \sum_j \left| \Delta\tilde{L}_{n,j} \right|^p \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right\}^{\frac{1}{p}} \right).$$

Покладемо $J_k := \{j : x_j \in [a_k, a_{k+1}]\}$. Тоді

$$\sum_{j:x_j\geq 0} \left| \Delta\tilde{L}_{n,j} \right|^p \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}}{n} = \sum_{k=1}^{[\log_2 n]} \sum_{j\in J_k} \left| \Delta\tilde{L}_{n,j} \right|^p \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \right) \frac{\sin\tau_{j,n}}{n} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{[\log_2 n]} \omega^{-p}\left(\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{n}\right)\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{n}\sum_{j\in J_k}\left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\log_2 n]} \omega^{-p}\left(\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{n}\right)\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{n}\left|\bigvee_{a_k}^{a_{k+1}}(F_{n\cdot 2^k})_p + \Delta_{p,k}^p\right|, \tag{4}$$

де $\Delta_{p,k} = n\cdot 2^k\left(\int\limits_{a_k}^{a_k+\frac{1}{n\cdot 2^k}} f(t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{a_k-\frac{2}{n\cdot 2^k}}^{a_k} f(t)dt\right)$.

Аналогічно оцінюється сума $\sum\limits_{j:x_j<0}\left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|^p \omega^{-p}\left(\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}\right)\frac{\sin\tau_{j,n}}{n}$.

Згідно з теоремою 3 в [6]

$$\bigvee_{a_k}^{a_{k+1}}(F_{n\cdot 2^k}) \leq \bigvee_{-1}^{1}(F_{n\cdot 2^k}) \leq Cn2^k\omega^p\left(f;\frac{1}{n\cdot 2^k}\right). \tag{5}$$

Оцінимо $\Delta_{p,k}$. Покладемо $h = \frac{1}{n\cdot 2^k}$. Тоді

$$h\Delta_{p,k} = \left|\int\limits_{a_k}^{a_k+h} f(t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{a_k-2h}^{a_k} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{a_k}^{a_k+h} f(t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{a_k-2h}^{a_k-h} f(t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{a_k-h}^{a_k} f(t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{a_k-2h}^{a_k-h}[f(t+2h)-f(t)]dt + \int\limits_{a_k-h}^{a_k}[f(t+h)-f(t)]\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(2\int\limits_{a_k-2h}^{a_k-h}|f(t+2h)-f(t+h)|\,dt + \int\limits_{a_k-2h}^{a_k-h}|f(t+h)-f(t)|\,dt\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{a_k-2h}^{a_k}|f(t+h)-f(t)|\,dt \leq \left\{\int\limits_{a_k-2h}^{a_k}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}(2h)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\omega(f;h)h^{\frac{1}{q}}.$$

Підставляючи тепер отриману оцінку для $\Delta_{p,k}$ та (5) у (4) приходимо до необхідної нерівності. Теорема доведена.

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 2 в [2].

Лема 2. *Нехай $\omega(t)-$ модуль неперервності, функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, для якої виконується нерівність*

$$\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)-P_{n-1}(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{s-1}}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

Тоді для кожного $n \geq s+2$ існує поліном степеня не вище n такий, що

$$\left(\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - Q_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^s} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq CM. \tag{6}$$

Нехай $f(x) \in W^r H_p^\omega$. Тоді для $f^{(r)} \in H_p^\omega$ згідно з теоремами 3 і 4 існує поліном P_n такий, що

$$\left\| \frac{f^{(r)}(x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right\|_p \leq \left\| \frac{f^{(r)}(x) - F_{\tilde{n}}(f^{(r)}, x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right\|_p +$$

$$+ \left\| \frac{F_{\tilde{n}}(f^{(r)}, x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right\|_p < C \ln^{\frac{1}{p}} n.$$

Використовуючи r раз лему 2 отримуємо доведення теореми 1.

Теорема 5. *Нехай $f \in L_p$. Тоді існує послідовність многочленів P_n така, що для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

$$\|f - P_n\|_p \leq C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_p.$$

Доведення теореми 5. Для функції F_n визначеної рівністю (1) за теоремою 2

$$\|f - F_n(f)\|_p \leq C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_p.$$

Нехай $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{2n-1} P_{x_j}(x)\Delta L_{n,j}$, де $P_{x_j}(x)-$ многолени, існування яких доведено лемою 1. Оцінимо $\|F_n(f) - P_n(x)\|_p$.

$$\|F_n(f) - P_n(x)\|_p = \left\{ \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \sum_{j=0}^{2n-1} \left(\Theta(x - x_j) - P_{x_j}(x)\right) \Delta L_{n,j} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{C}{n^{\frac{1}{p}}} \left\{ \sum_{i=0}^{2n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} |\Delta L_{n,j}| \frac{1}{(n(\arccos x_i - \arccos x_j) + 1)^{2m-1}} \right\}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

де

$$|\arccos x_i - \arccos x_j| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |x_i - x_j| \geq \frac{|i-j|}{n}.$$

Якщо $p = 1$, то змінюючи порядок підсумування, одержимо

$$\|F_n(f) - P_n(x)\|_p \leq \frac{C}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} |\Delta L_{n,j}| \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{(|i-j|+1)^{2m-1}} \leq$$

$$\leq \frac{C}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} |\Delta L_{n,j}| \leq \frac{C}{n} n\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_1 = C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_1.$$

Якщо $p > 1$, то застосуємо нерівність Гельдера:

$$\|F_n(f) - P_n(x)\|_p \leq$$

$$\leq \frac{C}{n^{\frac{1}{p}}} \left\{ \sum_{i=0}^{2n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} |\Delta L_{n,j}|^p \frac{1}{(|i-j|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{1}{(|i-j|+1)^{\frac{2m-1}{2}q}} \right\}^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} |\Delta L_{n,j}|^p \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{(|i-j|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_p.$$

Застосовуючи лему 2 одержимо наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай $f(x)$ має інтегровну похідну r-го порядку. Тоді існує поліном $P_n^r(x)$ такий, що*

$$\left\| \frac{f - P_n}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})} \right\|_p \leq \frac{C_r}{n^r} \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right)_p.$$

Теорема 6 є аналог теореми Джексона у випадку наближення функції алгебраїчними многочленами у просторі L_p.

Частиний випадок цієї теореми одержано в [2; 3] , якщо $\omega(f;t)_p \leq Ct^\alpha$.

Теорема 7. *Нехай $f \in W^r H_p^\omega$, де $\omega(t) = t^\alpha$. Тоді для кожного $n \geq r$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_n^r(x)$ степеня не вище n такий, що*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{r+\gamma}} \right\|_p \leq \frac{C_{r,\gamma}}{n^{r+\alpha}},$$

де константа $\gamma < \alpha$.

Теорема 7 без доведення сформулована в роботі [8] і було зауважено, що вона випливає з доведення теореми А. Користуючись випадком застосуємо доведення теореми А для доведення теореми 7.

Спочатку розглянемо випадок $r = 0$. Точки розбиття x_i, α_k візьмемо такі ж самі як при доведенні теореми 4, тобто теореми 6 з [6] і розглянемо спочатку відхилення функції $f(x)$ від $\tilde{F}_n(f;x)$:

$$\left\| \frac{f(x) - \tilde{F}_n(f;x)}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^\gamma} \right\|_p \le \left\{ \sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} \int\limits_{E_k} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f;x)|^p dx}{(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{p\gamma}} \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \left\{ \sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} \frac{1}{(\sqrt{1-\alpha_k^2})^{\gamma p}} \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - F_{n2^k}(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \left\{ \sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^{k\gamma p} \frac{1}{(n2^k)^{\alpha p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{ C \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{(\gamma-\alpha)p} \right\}^{\frac{1}{p}} \le C \frac{1}{n^\alpha},$$

оскільки ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(2^{kp}\right)^{j-\alpha}$ — збіжний. Далі розглянемо многочлен $P_n(x)$, як в теоремі 4 і оцінимо відхилення

$$\Delta(F_n, P_n) := \left\| \frac{F_n(f) - P_n}{(\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^\gamma} \right\|_p = \left\{ \int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{F_n(f) - P_n}{(\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^\gamma} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \left\{ \sum_i \frac{1}{(\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^{\gamma p}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left| (\Theta(x - x_j) - P_{x_j}(x)) \Delta \tilde{L}_{n,j} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \left\{ \frac{1}{n} \sum_i (\sin \tau_{i,n})^{1-\gamma p} \left(\sum_j \frac{\left| \Delta \tilde{L}_{n,j} \right|}{(n|\tau_{j,n} - \tau_{i,n}| + 1)^{2m-1}} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Нехай $p = 1$. Тоді користуючись нерівністю (2) коли $\sin \tau_{i,n} > \sin \tau_{j,n}$ одержимо

$$\Delta(F_n, P_n) \le C \sum_j \frac{\Delta \tilde{L}_{n,j}}{n} \left\{ \sum_{\sin \tau_{i,n} < \sin \tau_{j,n}} \frac{(\sin \tau_{i,n})^{1-\gamma}}{(n|\tau_{j,n} - \tau_{i,n}| + 1)^{2m-1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\sin \tau_{i,n} \ge \sin \tau_{j,n}} \frac{(\sin \tau_{i,n})^{1-\gamma}}{(n|\tau_{j,n} - \tau_{i,n}| + 1)^{2m-1}} \right\} \le$$

$$\le C \sum_j \frac{\left| \Delta \tilde{L}_{n,j} \right| (\sin \tau_{j,n})^{1-\gamma}}{n} \sum_i \frac{1}{(n|\tau_{j,n} - \tau_{i,n}| + 1)^{2m-1}} +$$

$$+\sum_j \frac{\left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right|}{n^{2-\gamma}} \sum_i \frac{1}{(n|\tau_{j,n}-\tau_{i,n}|+1)^{2m-2+\gamma}} \le$$

$$\le \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{[\log_2 n]-1} \sum_{j\in E_k} \left|\Delta\tilde{L}_{n,j}\right| (\sin\tau_{j,n})^{1-\gamma} \le \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{[\log_2 n]-1} \bigvee_{-1}^{1} (F_{n\cdot 2^k})_1 2^{-k(1-\gamma)} \le$$

$$\le C \sum_{k=1}^{[\log_2 n]-1} n\cdot 2^k \omega(f;(n\cdot 2^k)^{-1})\cdot (n\cdot 2^k)^{-1} 2^{k\gamma} \le C \sum_{k=1}^{[\log_2 n]-1} (n\cdot 2^k)^{-\alpha}\cdot 2^{k\gamma} \le$$

$$\le \frac{C}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{\gamma-\alpha} \le \frac{C}{n^\alpha}.$$

У випадку $p>1$ застосуємо нерівність Гельдера до внутрішньої суми

$$\Delta(F_n,P_n) = O\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_j (\sin\tau_{i,n})^{1-\gamma p} \frac{|\Delta\tilde{L}_{n,j}|^p}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}}\right\}\left\{\sum_j \frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}q}}\right\}^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\sum_j |\Delta\tilde{L}_{n,j}|^p \left\{\sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma p}}\cdot\frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\sin\tau_{i,n}\le\sin_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma p}}\cdot\frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}}\right\}\right).$$

Використовуючи зростання функції t^α та нерівність (2), отримаємо

$$\sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma p}}\cdot\frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \le$$

$$\le \sum_{\sin\tau_{i,n}>\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{j,n}+|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|}{(\sin\tau_{j,n})^{\gamma p}} \frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \le C\frac{\sin\tau_{j,n}}{(\sin\tau_{j,n})^{\gamma p}}.$$

Використовуючи спадання фунції $t^{\gamma-1}$ та нерівність (3) одержимо

$$\sum_{\sin\tau_{i,n}\le\sin\tau_{j,n}} \frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma p}}\cdot\frac{1}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} = \sum_{\sin\tau_{i,n}\le\sin\tau_{j,n}} \left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma}}\right)^p \cdot \frac{\sin^{1-p}\tau_{i,n}}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \le$$

$$\le C \sum_{\sin\tau_{i,n}\le\sin\tau_{j,n}} \left(\frac{\sin\tau_{i,n}}{(\sin\tau_{i,n})^{\gamma}}\right)^p \cdot \frac{\sin^{1-p}\tau_{j,n}+\sin^{1-p}\tau_{i,n}|\tau_{i,n}-\tau_{j,n}|^{p-1}}{(|j-i|+1)^{\frac{2m-1}{2}p}} \le C\frac{\sin\tau_{j,n}}{\sin^{p\gamma}\tau_{j,n}}.$$

Отже у випадку $p>1$

$$\Delta(F_n,P_n) = O\left(\frac{1}{n}\sum_j |\Delta\tilde{L}_{n,j}|^p \frac{\sin\tau_{j,n}}{\sin^{\gamma p}\tau_{j,n}}\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} \sum_{j\in E_k} |\Delta\tilde{L}_{n,j}|^p \frac{1}{2^k} 2^{k\gamma p}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^k n\left(\frac{1}{2^k n}\right)^{\alpha p}\frac{1}{2^k}2^{k\gamma p}\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{kp(\gamma-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right).$$

Бібліографічні посилання

1. *Лебедь Г.К.* Неравенства для многочленов и из производных. / Г.К. Лебедь // Докл. АН СССР, 117, №4. — 1957. С. 570–572.
2. *Потапов М.К.* О теоремах типа Джексона в метрике L_p. / М.К. Потапов // Докл. АН СССР, 111, №6. — 1956. С. 1185–1188.
3. *Потапов М.К.* Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике L_p. дис. канд. физ.-матем. наук. / М.К. Потапов —М., 1956. 105 с.
4. *Потапов М.К.* О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами. / М.К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та, №4. — 1960. С. 14–25.
5. *Потапов М.К.* О приближении алгебраическими полиномами в метрике L_p. / М.К. Потапов // Исследования по современным проблемам конструкивной теории функций, М., 1961.
6. *Моторный В.П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p. /В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Серия "Математика" 35. — 1971. С. 874–899.
7. *Брудный Ю.А.* Обобщение одной теоремы А.Ф. Тимана. /Ю.А. Брудный //Докл. АН СССР, 148, №6. –1963. С. 1237–1240.
8. *Моторный В.П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра. /В.П. Моторный //Изв. АН СССР, Серия "Математика" 37. — 1973. С. 135–147.

Надійшло до редколегії 10.05.2012