ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 519.217.3

Двогранична задача для процесу Коу

Є. В. Карнаух

* Днiпропетровський нацiональний унiверситет iм. Олеся Гончара,
Днiпропетровськ 49010. *E-mail: ievgen.karnaukh@gmail.com*

Вивчаються розподiли двограничних функцiоналiв для пуассонiвського процесу з показниково розподiленими стрибками та дифузiйним збуренням.

Ключовi слова: **Модель Коу, дифузiйно збурений пуассонiський процес, двограничнi функцiонали.**

Изучаются распределения двухграничных функционалов для процесса Пуассона с показательно распределенными скачками и возмущением, порожденным винеровским процессом.

Ключевые слова: **Модель Коу, процесс Пуассона с возмущением, двухграничные функционалы.**

In this paper the distribution of two-sided boundary functionals for double exponential jump diffusion processes are treated.

Key words: **Kou's model, jump-diffusion process, two-sided boundary functionals.**

1. Вступ

На основi результатiв робiт [1; 2] розглянуто, так званi, двограничнi функцiонали для процесу Коу – окремого випадку процесу Левi, в якому стрибкова складова має обмежену варiацiю, а додатнi та вiд'ємнi стрибки мають показниковий розподiл. При дослiдженнi генератрис вiдповiдних функцiоналiв застосовується факторизацiйний метод (див., наприклад, [2]), за яким розв'язок вiдповiдного рiвняння може бути визначений за термiнами розподiлiв екстремумiв процесу, зупиненого в показниково розподiлений момент часу.

Зазначимо, що iснує ряд альтернативних методiв дослiдження двограничних функцiоналiв, розроблених для процесiв Левi, зокрема, метод послiдовних iтерацiй (див. [3] та [6, лема 6.1]), за яким генератриси двограничних функцiоналiв можуть бути представленнi у виглядi ряду Неймана генератрис перестрибкових функцiоналiв, та резольвентний метод [4], за яким розв'язок будується в термiнах резольвенти процесу (в припущеннi, що додатнi або вiд'ємнi стрибки мають рацiональну характеристичну функцiю).

2. Процес Коу та його апроксимуючий процес

Процесом Коу називають стохастичний процес

$$\xi\left(t\right)=at+\sigma W\left(t\right)+S(t),\ \xi\left(0\right)=0,\ t\geq 0, \tag{1}$$

де a – обмежена стала, $\sigma > 0$, $W(t)$ – стандартний вінерівський процес, $S(t)$ – складний пуассонівський процес з інтенсивністю стрибків $\lambda > 0$, які мають двосторонній показниковий розподіл зі щільністю

$$f(x) = pce^{-cx} I_{\{x \geq 0\}} + qbe^{bx} I_{\{x<0\}}, (c, b, p, q > 0, p + q = 1). \tag{2}$$

Якщо θ_s – показниково розподілена випадкова величина з параметром $s > 0$ незалежна від $\xi(t)$, тоді генератриса моментів $\xi(\theta_s)$ має вигляд

$$\mathsf{E}e^{r\xi(\theta_s)} = \int_0^\infty se^{-st}\mathsf{E}e^{r\xi(t)}dt = \frac{s}{s-k(r)},\ \mathrm{Re}[r] = 0,$$

де функція $k(r)$ визначає кумулянту процесу $\xi(t)$. Для процесу (1) кумулянта $k(r)$ має вигляд

$$k(r) = ar + r^2\frac{\sigma^2}{2} + \lambda r\left(\frac{p}{c-r} - \frac{q}{b+r}\right). \tag{3}$$

Одним з важливих методів знаходження розподілів ряду функціоналів для процесів Леві є метод апроксимації викладений в [6]. За цим методом спочатку будується дограничний процес, який має просту структуру. Використовуючи стохастичні співвідношення для функціоналів дограничного процесу виводяться інтегро-диференціальні рівняння для генератриси відповідного розподілу. Після розв'язання отриманого рівняння і переходу до границі можемо одержати результат для основного процесу.

Дограничним процесом Коу будемо називати процес

$$\xi_n(t) = a_n t + S_n(t),$$

де $a_n = a + 3n\sigma^2/2$, $S_n(t)$ – складний пуассонівський процес з інтенсивністю стрибків $\lambda_n = \lambda p + 3n^2\sigma^2 + \lambda qe^{-b/n}$ та їх щільністю

$$f_n(x) = \begin{cases} p_1(n)\, ce^{-cx}, & x \geq 0; \\ p_2(n)\, n, & -\frac{1}{n} \leq x < 0; \\ p_3(n)\, be^{b(x+1/n)}, & x \leq -\frac{1}{n}, \end{cases}$$

де $p_1(n) = \lambda p/\lambda_n, p_{2n}(n) = 3n^2\sigma^2/\lambda_n, p_3(n) = e^{-b/n}\lambda q/\lambda_n$. Тобто в якості дограничного процесу розглянемо косо-східчастий процес з додатним знесенням (можливо починаючи з деякого n), показниково розподіленими додатними стрибками, крім того розподіл від'ємних стрибків є сумішшю показникового та рівномірного розподілів.

Процес $\xi_n(t)$ є апроксимуючим для процесу Коу $\xi(t)$. Позначимо подію $A_n(T) = \left\{\omega : \sup_{t\leq T}|\xi(t) - \xi_n(t)| > 1/\sqrt{n}\right\}$, тоді за нерівністю Колмогорова (див. [6]): $\mathsf{P}(A_n(T)) \leq Tn\frac{2e^{-b/n}}{b^2}\left(e^{b/n} - 1 - b/n - \frac{b^2}{2n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, тобто для будь-якого $T > 0$ ряд

$\sum_{n\geq 1}\mathsf{P}\left(A_n\left(T\right)\right)$ є збіжний і за лемою Бореля-Кантелі $\mathsf{P}\left\{\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}A_k\left(T\right)\right\} = 1$, отже

$$\mathsf{P}\left\{\bigcap_{T>0}\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\xi\left(t\right)-\xi_n\left(t\right)\right|=0\right\}=1.$$

Для кумулянти дограничного процесу маємо

$$k_n\left(r\right)=a_nr+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{rx}-1\right)\lambda_n f_n\left(x\right)dx=ar+\lambda q e^{-b/n}\left(\frac{b}{b+r}e^{r/n}-1\right)+$$
$$+\lambda p\left(\frac{c}{c-r}-1\right)-\frac{3n^3\sigma^2}{r}\left(e^{-r/n}-1+r/n-\frac{1}{2}\left(r/n\right)^2\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}k\left(r\right).$$

Тоді згідно з [5] скінченно вимірні розподіли дограничного процесу збігаються до відповідних скінченно вимірних розподілів граничного процесу і для деякої константи C, що можливо залежить від $\epsilon>0$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{|t_1-t_2|\leq h}\mathsf{P}\left\{\left|\xi_n\left(t_1\right)-\xi_n\left(t_2\right)\right|>\epsilon\right\}\leq Ch.$$

За теоремою 5 §5, гл. VI, т. I [5], якщо $f_T\left(x\left(\cdot\right)\right)$ – довільний функціонал заданий на просторі Скорохода $D_{[0,T]}\left(R\right)$, майже усюди неперервний в топології цього простору відносно міри $\mu_{[0,T]}$, що відповідає процесу $\xi\left(t\right)$ на $[0,T]$, то розподіл $f_T\left(\xi_n\left(\cdot\right)\right)$ збігається до розподілу величини $f_T\left(\xi\left(\cdot\right)\right)$. Згідно з [6] до таких функціоналів відносяться супремум, інфімум процесу, перестрибкові та двограничні функціонали.

Базовими функціоналами є екстремуми процесу:

$$\xi^+\left(t\right)=\sup_{u\leq t}\xi\left(u\right),\ \xi^-\left(t\right)=\inf_{u\leq t}\xi\left(u\right).$$

У термінах функцій розподілу цих функціоналів можуть бути виражені розподіли перестрибкових та двограничних функціоналів. При цьому важливе значення має основна факторизаційна тотожність (тотожність Спітцера-Рогозіна)

$$\mathsf{E}e^{r\xi(\theta_s)}=\mathsf{E}e^{r\xi^+(\theta_s)}\mathsf{E}e^{r\xi^-(\theta_s)},\mathrm{Re}[r]=0,$$

де множники $\mathsf{E}e^{r\xi^{\pm}(\theta_s)}$ мають аналітичне продовження на півплощини $\mathrm{Re}[r]\geq 0$ та $\mathrm{Re}[r]\leq 0$, відповідно.

Згідно з [1] кумулянтне рівняння $k\left(r\right)=s$ для процесу $\xi\left(t\right)$ має два додатні корені $\rho_{1,2}\left(s\right):\rho_1\left(s\right)<c<\rho_2\left(s\right)$ та два від'ємні $-r_{1,2}\left(s\right):r_1\left(s\right)<b<r_2\left(s\right)$, які повністю визначають щільності розподілів екстремумів та генератрису спільного розподілу перестрибкових функціоналів.

Лема 1 ([1])**.** *Для процесу Коу щільності розподілів супремуму та інфімуму є сумішшю експонент:*

$$P'_+\left(s,x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}\left\{\xi^+\left(\theta_s\right)<x\right\}=A_1^+e^{-\rho_1(s)x}+A_2^+e^{-\rho_2(s)x},x>0,\tag{4}$$

$$P'_-\left(s,x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}\left\{\xi^-\left(\theta_s\right)<x\right\}=A_1^-e^{r_1(s)x}+A_2^-e^{r_2(s)x},x<0,\tag{5}$$

де $A_i^+ = (-1)^{i-1}\frac{c-\rho_i(s)}{c}\frac{\rho_1(s)\rho_2(s)}{\rho_2(s)-\rho_1(s)}$ *та* $A_i^- = (-1)^{i-1}\frac{b-r_i(s)}{b}\frac{r_1(s)r_2(s)}{r_2(s)-r_1(s)}$, $i = 1, 2$.

Для моменту першого виходу за рівень $x \geq 0$*:* $\tau^+(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) > x\}$, *та перестибку в цей момент* $\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ *має місце властивість умовної незалежності та умовної відсутності пам'яті відносно події* $\{\gamma^+(x) > 0\}$*:*

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma^+(x) = 0, \tau^+(x) < \infty\right] = \frac{c-\rho_1(s)}{\rho_2(s)-\rho_1(s)}e^{-\rho_1(s)x} + \frac{\rho_2(s)-c}{\rho_2(s)-\rho_1(s)}e^{-\rho_2(s)x}, \tag{6}$$

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma^+(x)}, \gamma^+(x) > 0, \tau^+(x) < \infty\right] = \\ = \frac{(c-\rho_1(s))(\rho_2(s)-c)}{c(\rho_2(s)-\rho_1(s))}\left(e^{-\rho_1(s)x} - e^{-\rho_2(s)x}\right)\frac{c}{c+u}. \tag{7}$$

Використовуючи формули (4) – (7) можемо отримати співвідношення для генератрис функціоналів процесу Коу, пов'язаних з виходом процесу з деякого інтервалу.

3. Двограничні функціонали

Розглянемо момент виходу з інтервалу $(0 < x < T)$

$$\tau(x, T) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \notin (x - T, x)\},$$

та будемо вважати, що $\tau(x, T) = 0$ при $x \notin (0, T)$. Позначимо події виходу через верхню та нижню границі через

$$A_+(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) \geq x\}, \ A_-(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) \leq x - T\},$$

та генератриси моменту виходу через верхню та нижню границю, відповідно

$$Q^T(s, x) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)}, A_+(x)\right], \ Q_T(s, x) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)}, A_-(x)\right].$$

Для знаходження генератриси моменту виходу з інтервалу спочатку розглянемо дограничний процес, і перейшовши до границі при $n \to \infty$, одержимо відповідний результат для процесу Коу. Для простоти запису залежність параметрів дограничного процесу від n не буде явно відмічатись.

3.1. Генератриса моменту виходу з інтервалу

Розглянемо стохастичне співвідношення для $\tau(x, T)$ на $A_+(x)$. Нехай ζ – момент першого стрибка, η – величина першого стрибка процесу $\xi_n(t)$ (рис. 1), тоді

$$\tau(x, T) \doteq \begin{cases} x/a, & a\zeta > x; \\ \zeta + \tau(x - a\zeta - \eta, T), & a\zeta < x, \ x - T < a\zeta + \eta < x; \\ \zeta, & a\zeta < x, \ a\zeta + \eta \geq x. \end{cases}$$

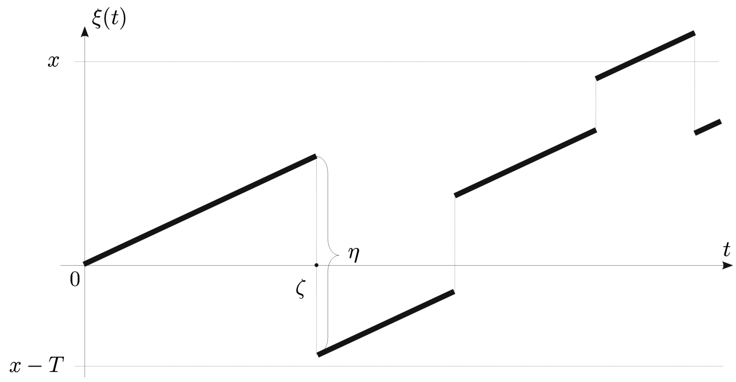

Рис. 1. Траєкторія допграничного процесу

На основі даного стохастичного співвідношення для генератриси $Q^T(s,x)$ виводимо

$$Q^T(s,x) = \mathsf{E}\left[e^{-sx/a}, a\zeta > x\right] + \mathsf{E}\left[e^{-s(\zeta+\tau(x-a\zeta-\eta,T))}, a\zeta < x,\, x-T < a\zeta+\eta < x\right] + \\ + \mathsf{E}\left[e^{-s\zeta}, a\zeta < x,\, a\zeta+\eta \ge x\right].$$

Враховуючи, що ζ має показниковий розподіл з параметром λ, а η має щільність $f(x)$, одержимо

$$Q^T(s,x) = e^{-(s+\lambda)\frac{x}{a}} + \int_0^{x/a} \lambda e^{-(s+\lambda)y} \int_{x-ay-T}^{x-ay} Q^T(s,x-ay-z)\, f(z)\, dzdy + \\ + \int_0^{x/a} \lambda e^{-(s+\lambda)y} \int_{x-ay}^{\infty} f(z)\, dzdy,$$

і, використовуючи граничні умови:

$$Q^T(s,x) = \begin{cases} 1, & x \le 0; \\ 0, & x \ge T, \end{cases}$$

маємо

$$Q^T(s,x) = e^{-(s+\lambda)\frac{x}{a}} + \frac{\lambda}{a}\int_0^x e^{-(s+\lambda)\frac{x-y}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s,y-z)\, f(z)\, dzdy.$$

Продиференціювавши одержане рівняння за x, виводимо рівняння для генератриси моменту виходу з інтервалу через верхню границю при $0 < x < T$:

$$a\frac{\partial}{\partial x}Q^T(s,x) = -(s+\lambda)\,Q^T(s,x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s,x-z)\, f(z)\, dz,$$

яке після визначення для $x \ge T$ з урахуванням граничних умов, буде мати вигляд

$$a\frac{\partial}{\partial x}Q^T(s,x) = -(s+\lambda)\,Q^T(s,x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s,x-z)\, f(z)\, dzdy - C_T(x),$$

де $C_T(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s, x-z) f(z)\, dz I_{\{x \geq T\}}$ та $I_{\{\cdot\}}$ – індикаторна функція. Використовуючи основну факторизаційну тотожність та операцію проектування $[\cdot]_J$, $J \subset (-\infty, \infty)$: для абсолютно інтегровної на дійсній осі функції $g(x)$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} g(x)\, dx\right]_J = \int_J e^{rx} g(x)\, dx; \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} g(x)\, dx + C\right]_{\pm}^{0} = \mp \int_0^{\pm\infty} e^{rx} g(x)\, dx + C,$$

з одержаного рівняння з указаними граничними умовами можна визначити інтегральне перетворення для генератриси моменту виходу через верхню границю.

Лема 2. *Інтегральне перетворення генератриси $Q^T(s, x)$ для дограничного процесу Коу має вигляд*

$$\int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx = s^{-1} \mathsf{E} e^{r\xi^+(\theta_s)} \left[\mathsf{E} e^{r\xi^-(\theta_s)} a \left(1 - e^{rT} Q^T(s, T-0)\right)\right]_+^0 +$$
$$+ s^{-1} \mathsf{E} e^{r\xi^+(\theta_s)} \left[\mathsf{E} e^{r\xi^-(\theta_s)} \int_0^{\infty} e^{rx} \left(\int_{-\infty}^{0} Q^T(s, z)\, \lambda f(x-z)\, dz - C_T(x)\right) dx\right]_+^0. \quad (8)$$

Доведення. Оскільки функція $Q^T(s, x)$ має стрибок у точці T, тобто $Q^T(s, T-0) \neq Q^T(s, T) = 0$, то

$$-ar \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx = a\left(1 - e^{rT} Q^T(s, T-0)\right) + \int_0^{\infty} e^{rx} a \frac{\partial}{\partial x} Q^T(s, x)\, dx,$$
$$\int_0^{\infty} e^{rx} a \frac{\partial}{\partial x} Q^T(s, x)\, dx = -(s+\lambda) \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx +$$
$$+ \int_0^{\infty} e^{rx} \int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s, x-z)\, \lambda f(z)\, dz dx - \int_0^{\infty} e^{rx} C_T(x)\, dx.$$

Звідки

$$-ar \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx = a\left(1 - e^{rT} Q^T(s, T-0)\right) - (s+\lambda) \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx +$$
$$+ \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{rz} \lambda f(z)\, dz + \int_0^{\infty} e^{rx} \int_{-\infty}^{0} Q^T(s, z)\, \lambda f(x-z)\, dz dx -$$
$$- \int_{-\infty}^{0} e^{rx} \int_0^{\infty} Q^T(s, z)\, \lambda f(x-z)\, dz dx - \int_0^{\infty} e^{rx} C_T(x)\, dx,$$

або

$$(s - k(r)) \int_0^{\infty} e^{rx} Q^T(s, x)\, dx = a\left(1 - e^{rT} Q^T(s, T-0)\right) - \int_0^{\infty} e^{rx} C_T(x)\, dx +$$
$$+ \int_0^{\infty} e^{rx} \int_{-\infty}^{0} Q^T(s, z)\, \lambda f(x-z)\, dz dx - \int_{-\infty}^{0} e^{rx} \int_0^{\infty} Q^T(s, z)\, \lambda f(x-z)\, dz dx,$$

Використовуючи основну факторизаційну тотожність та операцію проектування, отримаємо

$$s\int_0^\infty e^{rx}Q^T(s,x)\,dx = \mathsf{E}e^{r\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{r\xi^-(\theta_s)}a\left(1-e^{rT}Q^T(s,T-0)\right)\right]_+^0 -$$
$$-\mathsf{E}e^{r\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{r\xi^-(\theta_s)}\int_{-\infty}^0 e^{rx}\int_0^\infty Q^T(s,z)\,\lambda f(x-z)\,dzdx\right]_+^0 +$$
$$+\mathsf{E}e^{r\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{r\xi^-(\theta_s)}\int_0^\infty e^{rx}\left(\int_{-\infty}^0 Q^T(s,z)\,\lambda f(x-z)\,dz - C_T(x)\right)dx\right]_+^0$$

де другий доданок після проектування дорівнює нулю.

Після обернення співвідношення (8) по r одержуємо

$$sQ^T(s,x) = sP'_+(s,x)\,C_+(s) - aQ^T(s,T-0)\times$$
$$\times\left(\int_{-T}^{\min\{x-T,0\}} P'_+(s,x-y-T)\,P'_-(s,y)\,dy + p_-(s)\,P'_+(s,x-T)\,I_{\{x\geq T\}}\right)+$$
$$+\int_0^x\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 Q^T(s,u)\,\lambda f(x-y-z-u)\,dudP_-(s,z)\,dP_+(s,y)-$$
$$-\int_0^x\int_{-\infty}^0 C_T(x-y-z)\,dP_-(s,z)\,dP_+(s,y). \quad (9)$$

Враховуючи, що при $u\leq 0$, $Q^T(s,u)=1$, та при $u>0$, $\lambda f(u)=\lambda pce^{-cu}$, маємо

$$\int_{-\infty}^0 Q^T(s,u)\,\lambda f(x-y-z-u)\,du = \int_{-\infty}^0 \lambda f(x-y-z-u)\,du = \lambda pe^{-c(x-y-z)},$$
$$C_T(x-y-z) = \lambda pe^{-c(x-y-z)}\left(\int_0^T Q^T(s,u)\,ce^{cu}du+1\right)I_{\{x-y-z\geq T\}}.$$

Позначивши $C_0(T)=\int_0^T Q^T(s,u)\,ce^{cu}du+1$ та $C_1(T)=s^{-1}aQ^T(s,T-0)$, підставимо одержані співвідношення до (9):

$$Q^T(s,x) = P\left\{\xi^+(\theta_s)\geq x\right\} - C_1(T)\int_{-T}^{\min\{x-T,0\}} P'_+(s,x-y-T)\,dP_-(s,y)-$$
$$-C_0(T)\int_0^x\int_{-\infty}^{x-y-T} s^{-1}\lambda pe^{-c(x-y-z)}dP_-(s,z)\,dP_+(s,y). \quad (10)$$

Формула (10) визначає генератрису моменту виходу через верхню границю для дограничного процесу Коу.

Теорема 1. *Для процесу Коу генератриса моменту виходу з інтервалу* $(x-T,x)$, $0\le x\le T$ *через верхню границю має вигляд*

$$Q^T(s,x)=P\left\{\xi^+(\theta_s)\ge x\right\}-C_1(T)\int_{-T}^{x-T}P'_+(s,x-y-T)\,P'_-(s,y)\,dy-$$
$$-C_0(T)\int_0^x\int_{-\infty}^{x-y-T}s^{-1}\lambda pe^{-c(x-y-z)}P'_-(s,z)\,P'_+(s,y)\,dzdy. \quad (11)$$

де $P'_\pm(s,x)$ *визначаються формулами (4) – (5), а величини* $C_0(T)$ *та* $C_1(T)$ *задовольняють рівняння* $C_0(T)=\int_0^T Q^T(s,u)\,ce^{cu}du+1$ *та* $Q^T(s,T)=0$.

Для генератриси моменту виходу через нижню границю вірне аналогічне співвідношення

$$Q_T(s,x)=P\left\{\xi^-(\theta_s)\le x-T\right\}-C^1(T)\int_x^T P'_-(s,x-y)\,P'_+(s,y)\,dy-$$
$$-C^0(T)\int_{x-T}^0\int_{x-y}^{\infty}s^{-1}\lambda qe^{b(x-y-z-T)}P'_+(s,z)\,P'_-(s,y)\,dzdy. \quad (12)$$

де $C^0(T)$ *та* $C^1(T)$ *задовольняють рівняння* $C^0(T)=\int_0^T Q_T(s,u)\,be^{-b(u-T)}du+1$ *та* $Q_T(s,0)=0$.

Доведення. Враховуючи, що за умови $n\to\infty$ розподіли екстремумів та розподіл моменту виходу з інтервалу для дограничного процесу збігаються до розподілів відповідних функціоналів процесу Коу: $P^n_\pm(s,x)\to P_\pm(s,x)$, $Q^T_n(s,x)\to Q^T(s,x)$, то $C^n_0(T)\to C_0(T)$ та $C^n_1(T)\to C_1(T)$. Крім того, враховуючи, що $\mathsf{P}\{\xi^-_n(\theta_s)=0\}\to 0$, після граничного переходу за $n\to\infty$ з (10) одержуємо (11). Для того, щоб вивести формулу для генератриси виходу через нижню границю, можемо використати той факт, що $Q_T(s,x)=Q^T_1(s,T-x)$, де $Q^T_1(s,x)$ генератриса моменту виходу через верхню границю для процесу $\xi_1(t)=-\xi(t)$.

Позначимо інтеграли у формулі (11) через

$$J_1(s,x,T)=\int_{-T}^{x-T}P'_+(s,x-y-T)\,P'_-(s,y)\,dy,$$
$$J_2(s,x,T)=\int_0^x\int_{-\infty}^{x-y-T}s^{-1}\lambda pe^{-c(x-y-z)}P'_-(s,z)\,P'_+(s,y)\,dzdy,$$

тоді

$$Q^T(s,x)=P\left\{\xi^+(\theta_s)\ge x\right\}-C_1(T)\,J_1(s,x,T)-C_0(T)\,J_2(s,x,T).$$

Для знаходження $C_0(T),C_1(T)$ використаємо граничні умови для генератриси $Q^T(s,x)$: $Q^T(s,T)=0$ та $\int_0^T Q^T(s,u)\,ce^{cu}du+1=C_0(T)$, з яких отримаємо

$$C_0(T)=\frac{\left(1+\tilde{J}_0\right)J_1-\tilde{J}_1J_0}{J_1\left(1+\tilde{J}_2\right)-J_2\tilde{J}_1},C_1(T)=\frac{\left(1+\tilde{J}_2\right)J_0-J_2\left(1+\tilde{J}_0\right)}{J_1\left(1+\tilde{J}_2\right)-J_2\tilde{J}_1},$$

де $J_0 = P\left\{\xi^+(\theta_s) \geq T\right\}$, $J_1 = J_1(s,T,T)$, $J_2 = J_2(s,T,T)$, $\tilde{J}_0 = \int_0^T \overline{P}_+(s,u)\, ce^{cu}du$, $\tilde{J}_{1,2} = \int_0^T J_{1,2}(s,u,T)\, ce^{cu}du$.

3.2. Спільний розподіл двограничних функціоналів

Розглянемо додатково величину перестрибку через границю інтервалу

$$\gamma_T(x) = (\xi(\tau(x,T)) - x) I_{A_+(x)} + (x - T - \xi(\tau(x,T)) I_{A_-(x)}.$$

Застосовуючи подібні міркування як у попередньому параграфі, можемо отримати, що спільна генератриса для розподілу моменту виходу через верхню границю та перестрибку в цей момент задовольняє аналогічне до (11) рівняння ($\mathrm{Im}(\alpha) = 0$)

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)}, A_+(x)\right] = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)+i\alpha\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\right] - \\ - C_1(T,\alpha)\, J_1(s,x,T) - C_0(T,\alpha)\, J_2(s,x,T), \quad (13)$$

де $C_0(T,\alpha)$ та $C_1(T,\alpha)$ задовольняють рівняння $\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(T,T)+i\alpha\gamma_T(T)}, A_+(T)\right] = 0$ та $C_0(T,\alpha) = \int_0^T \mathsf{E}\left[e^{-s\tau(u,T)+i\alpha\gamma_T(u)}, A_+(u)\right] ce^{cu}du + c(c - i\alpha)^{-1}$.

Використовуючи позначення

$$V_0 = \mathsf{E}\Big[e^{-s\tau^+(T)}, \gamma^+(T) = 0, \tau^+(T) < \infty\Big], V_> = \mathsf{E}\Big[e^{-s\tau^+(T)}, \gamma^+(T) > 0, \tau^+(T) < \infty\Big],$$

$$\tilde{V}_0 = \int_0^T \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) = 0, \tau^+(u) < \infty\right] ce^{cu}du,$$

$$\tilde{V}_{>0} = \int_0^T \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) > 0, \tau^+(u) < \infty\right] ce^{cu}du,$$

з формули (13) знаходимо спільну генератрису в матричній формі

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)}, A_+(x)\right] = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma^+(x) = 0, \tau^+(x) < \infty\right] + \\ + \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma^+(x) > 0, \tau^+(x) < \infty\right] \frac{c}{c - i\alpha} - \\ - (J_1(s,x,T); J_2(s,x,T)) \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ \tilde{J}_1 & 1 + \tilde{J}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_0 + \frac{c}{c-i\alpha} V_> \\ \tilde{V}_0 + \frac{c}{c-i\alpha} \tilde{V}_> \end{pmatrix}.$$

Звідки безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 2. *Для генератриси спільного розподілу моменту виходу процесу Коу з інтервалу $(x - T, x)$ через верхню границю та перестрибку в цей момент за умови $0 \leq x \leq T$ мають місце такі співвідношення*

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)}, \gamma_T(x) = 0, A_+(x)\right] = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma^+(x) = 0, \tau^+(x) < \infty\right] - \\ - (J_1(s,x,T); J_2(s,x,T)) \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ \tilde{J}_1 & 1 + \tilde{J}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_0 \\ \tilde{V}_0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

та

$$\mathsf{E}\Big[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)},\gamma_T(x)>0,A_+(x)\Big]=\frac{c}{c-i\alpha}\Big(\mathsf{E}\Big[e^{-s\tau^+(x)},\gamma^+(x)>0,\tau^+(x)<\infty\Big]-$$
$$-\left(J_1(s,x,T);J_2(s,x,T)\right)\begin{pmatrix}J_1 & J_2\\ \tilde{J}_1 & 1+\tilde{J}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}V_>\\ \tilde{V}_>\end{pmatrix}\Big). \quad (15)$$

З формул (14) – (15) випливають властивості умовної незалежності моменту виходу з інтервалу через верхню границю та перестрибку в цей момент, а також умовної відсутності пам'яті відносно події $\{\gamma_T(x)>0\}$.

3.3. Щільність розподілу процесу до моменту виходу з інтервалу

Для знаходження генератриси розподілу процесу до моменту виходу з інтервалу застосуємо тотожність Печерського (див., наприклад, [2, теорема 4.3])

$$\mathsf{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\tau(x,T)>\theta_s\right]=$$
$$=\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}\left(1-e^{i\alpha x}\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)},A_+(x)\right]\right)\right]_{[x-T,\infty)}=$$
$$=\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}\right]_{[x-T,\infty)}-$$
$$-\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}e^{i\alpha x}\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)=0,A_+(x)\right]\right]_{[x-T,\infty)}-$$
$$-\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}e^{i\alpha x}\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)},\gamma_T(x)>0,A_+(x)\right]\right]_{[x-T,\infty)}. \quad (16)$$

Для першого доданку в (16) знаходимо, що

$$\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}\right]_{[x-T,\infty)}=\int_0^\infty e^{i\alpha z}P'_+(s,z)\,dz\int_{x-T}^0 e^{i\alpha y}P'_-(s,y)\,dy=$$
$$=\int_{x-T}^\infty e^{i\alpha z}\int_{x-T}^{\min\{0,z\}}P'_+(s,z-y)\,P'_-(s,y)\,dydz,$$

для другого отримаємо

$$\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}e^{i\alpha x}\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)=0,A_+(x)\right]\right]_{[x-T,\infty)}=$$
$$=\int_{x-T}^\infty e^{i\alpha z}\int_{x-T}^{\min\{z,x\}}P'_+(s,z-y)\,P'_-(s,y)\,dy\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)=0,A_+(x)\right],$$

та для третього

$$\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\left[\mathsf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}e^{i\alpha x}\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)+i\alpha\gamma_T(x)},\gamma_T(x)>0,A_+(x)\right]\right]_{[x-T,\infty)}=$$
$$=\int_{x-T}^\infty e^{i\alpha z}\int_{x-T}^{z}P'_+(s,z-v)\int_{-\infty}^{\min\{x,v\}}ce^{-c(v-y)}P'_-(s,y)\,dydvdz\times$$
$$\times\,\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)>0,A_+(x)\right].$$

Після обернення генератриси (16) по α знаходимо щільність процесу зупиненого у показниково розподілений час до моменту виходу з інтервалу.

Теорема 3. *Щільність розподілу процесу Коу до моменту виходу з інтервалу* $(x-T,x)$ *має вигляд*

$$h_s(T,x,z)=\frac{\partial}{\partial z}P\left\{\xi(\theta_s)<z,\tau(x,T)>\theta_s\right\}=\int_{x-T}^{\min\{0,z\}}P'_+(s,z-y)\,P'_-(s,y)\,dy-$$
$$-\int_{x-T}^{\min\{z,x\}}P'_+(s,z-y)\,P'_-(s,y)\,dy\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)=0,A_+(x)\right]-$$
$$-\int_{x-T}^{z}P'_+(s,z-v)\int_{-\infty}^{\min\{x,v\}}ce^{-c(v-y)}P'_-(s,y)\,dydv\mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\gamma_T(x)>0,A_+(x)\right].\tag{17}$$

Щільність $h_s(T,x,y)$ визначає спільний розподіл $\{\xi^-(\theta_s),\xi(\theta_s),\xi^+(\theta_s)\}$ (див. детально [3]).

Приклад. У якості прикладу розглянемо два випадки параметрів процесу (табл. 1). Основна їх відмінність полягає у тому, що математичне сподівання $m=\mathsf{E}\xi(1)$ має різні знаки: в першому випадку $m<0$, а в другому $m>0$. Знак математичного сподівання впливає на асимптотику коренів кумулянтного рівняння.

Спочатку з рівняння

$$ar+r^2\frac{\sigma^2}{2}+\lambda r\left(\frac{p}{c-r}-\frac{q}{b+r}\right)=s$$

отримуємо наближені значення коренів, а потім за допомогою формул (4) - (5) обчислюємо щільності інфімуму та супремуму процесу.

Таблиця 1

Щільності екстремумів

	Випадок 1)
Параметри	$a=-3.05,p=0.75,\lambda=4,c=2,b=8,\sigma=0.5,s=4/45$
Корені	$r_2\approx 8.2084,r_1\approx 0.0515,\rho_1\approx 1.0000,\rho_2\approx 13.4599$
Щільності	$P'_-(s,x)\approx 0.0515e^{0.0515x}+0.0014e^{8.2084x},x<0$
	$P'_+(s,x)\approx 6.1898e^{-13.4599x}+0.5401e^{-1.0000x},x>0$
	Випадок 2)
Параметри	$a=1,p=0.2,\lambda=6,c=2,b=8,\sigma=2,s=1$
Корені	$r_2\approx 8.6470,r_1\approx 1.3654,\rho_1\approx 0.5504,\rho_2\approx 2.4621$
Щільності	$P'_-(s,x)=1.3447e^{1.3654x}+0.1311e^{8.6470x},x<0$
	$P'_+(s,x)=0.1638e^{-2.4621x}+0.5138e^{-0.5504x},x>0$

Підставляючи знайдені щільності екстремумів до формул (11) – (12), одержуємо зображення для генератриси виходу через верхню та нижню границю відповідно, а також їх суми $Q(s,x,T) = \mathsf{E}e^{-s\tau(x,T)}$ (рис. 2). Зазначимо, що відповідні вирази є достатньо громіздкими тому явні формули не наводяться.

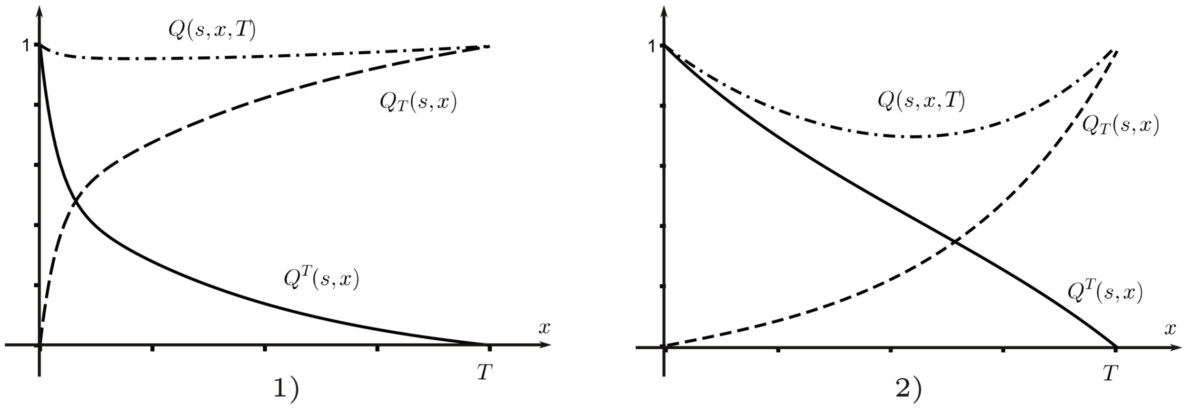

Рис. 2. Генератриси виходу з інтервалу $(x-T,x)$

Бібліографічні посилання

1. *Kou S.G.* First passage times of a jump diffusion process // Adv. Appl. Prob., 2003. – Vol. 35. – P. 504–531.
2. *Гусак Д.В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. / Д.В. Гусак – К. : Ін-т математики НАН України, 2011. – 544 с.
3. *Каданков В.Ф.* О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий / В.Ф. Каданков, Т.В. Каданкова // Укр. мат. журн., 2005. – Т. 57, № 10. – С. 1359–1384.
4. *Братийчук Н.С.* Построение резольвенты процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода из интервала / Н.С. Братийчук // Теория вероятности и мат. статистика, 1984. – Т. 30. – С. 25-34.
5. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов. В 3-х т. / И.И. Гихман, А.В. Скороход – М. : Наука, 1971–1975.
6. *Братийчук Н.С.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. / Н.С. Братийчук, Д.В. Гусак – К. : Наук. думка, 1990. – 264 с.

Надійшла до редколегії 04.04.2013