ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип. **21**

УДК 517.5

А. М. Пасько
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. *E-mail: pasko08@meta.ua*

Групи гомологій простору $\mathbb{C}\Omega_n$ у деяких вимірностях

Ґрунтуючись на клітинному розбитті, обчислено гомологічні групи просторів $\mathbb{C}\Omega_n$ у вимірностях $0, 1, 2, 2n-1, 2n, 2n+1$. Установлено рівність нулю ейлерової характеристики простору $\mathbb{C}\Omega_n$.

Ключові слова: гомологічні групи, клітинний простір, сплайн.

Основываясь на клеточном разбиении, вычислены группы гомологий $H_k(\mathbb{C}\Omega_n)$ в размерностях $k = 0, 1, 2, 2n-1, 2n, 2n+1$. Установлено равенство нулю эйлеровой характеристики пространства $\mathbb{C}\Omega_n$.

Ключевые слова: гомологические группы, клеточное пространство, сплайн.

The homology groups $H_k(\mathbb{C}\Omega_n), k = 0, 1, 2, 2n-1, 2n, 2n+1$, have been calculated. It has been established, that the space $\mathbb{C}\Omega_n$ has a zero euler characteristic.

Key words: homology groups, CW complex, spline.

Нехай $\omega(t)$ – неперервна, монотонно зростаюча на відрізку [0, 1] функція, така, що $\omega(0) = 0$, G – дійсна вісь $\mathbb{R}$ або комплексна площина $\mathbb{C}$. Для кожного розбиття проміжку [0, 1] $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$ і набору чисел $s_k \in G, |s_k| = 1, k = 0, \ldots, q$ розглянемо задану на відрізку [0, 1] функцію (ω-сплайн)

$$F(\eta, s, t) = s_k \cdot \min\{\omega(t - \eta_k), \omega(\eta_{k+1} - t)\}, \qquad t \in (\eta_k, \eta_{k+1}]. \tag{1}$$

На множині функцій вигляду (1), у яких кількість вузлів $q \leq n$, уведемо топологію, визначену метрикою, індукованою з $L_1[0,\ 1]$. Якщо $G = \mathbb{R}$, то одержаний топологічний простір позначимо символом Ω_n, якщо ж $G = \mathbb{C}$ – символом $\mathbb{C}\Omega_n$. Гомотопічні інваріанти просторів Ω_n досліджено в [1; 2; 4; 5]. Простори $\mathbb{C}\Omega_n$ уведено в [3], де встановлено їх однозв'язність у разі $n \geq 2$.

Опишемо побудовану там само клітинну структуру простору сплайнів $\mathbb{C}\Omega_n$. Для цього розглянемо двосимвольний алфавіт $A = \{1, e\}$. Зафіксуємо ціле число $q \geq 0$ і для кожного слова $u = u_0 u_1 \ldots u_q$ із символів $u_k \in A$ розглянемо множину

© *ПАСЬКО А. М., 2016*

$c^q(u)$ заданих рівністю (1) сплайнів, які мають рівно $q+2$ вузли $0=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_q<\eta_{q+1}=1$, а числа $s=(s_0,s_1,\ldots,s_q)$ визначають як

$$s_k=\begin{cases}1, & \text{якщо } u_k=1,\\ e^{i\phi_k}, \text{де } 0<\phi_k<2\pi, & \text{якщо } u_k=e.\end{cases}$$

Нехай $h=h(u)$ – кількість рівних e символів слова $u=u_0u_1\ldots u_q$, $0\le h(u)\le q+1$. Множини $c^q(u)$, $q\le n$ утворюють клітинну структуру на $\mathbb{C}\Omega_n$, причому кожна множина $c^q(u)$ є клітина вимірності $q+h(u)$. Найвищу вимірність $2n+1$ має одна-єдина клітина $c^n(ee\ldots e)$, отже, $\dim\mathbb{C}\Omega_n=2n+1$.

Нехай E – клітинний простір, q-вимірними ланцюгами простору E називають формальні суми $\sum\limits_k m_k e_k^q$, де e_k^q – орієнтовані q-вимірні клітини (орієнтації задано характеристичними відображеннями), а m_k – цілі числа, причому $m_k\neq 0$ лише для скінченної кількості значень індексу k. Множина q-вимірних ланцюгів простору E із визначеною природним способом операцією додавання утворює абелеву групу, яку називають групою q-вимірних ланцюгів і позначають $C_q(E)$.

Із послідовністю груп $C_q(E), q\ge 0$ асоціюють послідовність гомоморфізмів (межових операторів) $\partial=\partial_q: C_q(E)\longrightarrow C_{q-1}(E)$ (вважають, що $C_{-1}(E)=0$). Для кожної клітини e_k^q

$$\partial e_k^q=\sum_r [e_k^q : e_r^{q-1}]e_r^{q-1}$$

цілі числа $[e_k^q : e_r^{q-1}]$ називають коефіцієнтами інцидентності. Відома (див. [6]) рівність $\partial_q\partial_{q+1}=0$ дозволяє визначити фактор-групи $H_q(E)=\mathrm{Ker}\partial_q/\mathrm{Im}\partial_{q+1}, q=0,1,2,\ldots$. Групу $H_q(E)$ називають q-вимірною групою гомологій простору E. Елементи підгруп $Z_q=\mathrm{Ker}\partial_q$, $B_q=\mathrm{Im}\partial_{q+1}$ називають відповідно q-вимірними циклами та q-вимірними межами простору E.

Нехай $u=u_0\ldots u_q$ – слово із $q+1$ символів алфавіту A. Позначимо $u_0\ldots\hat{u}_k\ldots u_q$ слово, одержане зі слова $u_0\ldots u_q$ вилученням одного символу $u_k, 0\le k\le q$. У [3] встановлено вигляд межового оператора

$$\partial c^q(u)=\sum_{k:\ u_k=1}(-1)^k c^{q-1}(u_0\ldots\hat{u}_k\ldots u_q) \tag{2}$$

для будь-якої $q+h(u)$-вимірної клітини $c^q(u)$ простору $\mathbb{C}\Omega_n$.

У цій статті знайдено групи гомологій $H_k(\mathbb{C}\Omega_n)$ у деяких вимірностях. А саме має місце теорема.

Теорема 1. *Для будь-якого $n\ge 2$ групи гомологій простору $\mathbb{C}\Omega_n$ у вимірностях $0,1,2,2n-1,2n,2n+1$ дорівнюють*

$$H_k(\mathbb{C}\Omega_n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{якщо } k=0, k=2n+1;\\ 0, & \text{якщо } k=1, k=2;\\ \mathbb{Z}^{n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, & \text{якщо } k=2n-1;\\ \mathbb{Z}^n, & \text{якщо } k=2n.\end{cases} \tag{3}$$

Доведення. У разі $k = 0$ та $k = 1$ рівність (3) випливає відповідно з лінійної зв'язності та однозв'язності простору $\mathbb{C}\Omega_n$. Розглянемо випадок $k = 2n + 1$. У вимірності $2n + 1$ простір $\mathbb{C}\Omega_n$ має одну-єдину клітину $c^n(ee\dots e)$, причому з (2) бачимо, що $\partial c^n(ee\dots e) = 0$, тобто ця клітина – цикл. Оскільки клітин вимірності, вищої за $2n + 1$, у просторі $\mathbb{C}\Omega_n$ немає, група $2n + 1$-вимірних меж тривіальна і $H_{2n+1}(\mathbb{C}\Omega_n) = \mathbb{Z}$ (вільна група з однією твірною $c^n(ee\dots e)$).

Розглянемо випадок $k = 2$. Простір $\mathbb{C}\Omega_n$ містить 3 двовимірні клітини $c^1(e1)$, $c^1(1e)$, $c^2(111)$, отже, $C_2(\mathbb{C}\Omega_n)$ складається з ланцюгів вигляду

$$\alpha c^1(e1) + \beta c^1(1e) + \gamma c^2(111),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Згідно з (2) межа такого ланцюга

$$\partial(\alpha c^1(e1) + \beta c^1(1e) + \gamma c^2(111)) = (\beta - \alpha)c^0(e) + \gamma c^1(11).$$

У такому разі група двовимірних циклів Z_2 складається з ланцюгів вигляду (4), у яких $\alpha = \beta, \gamma = 0$, отже, Z_2 – вільна абелева група з однією твірною $c^1(e1)+c^1(1e)$. Але ця твірна $c^1(e1) + c^1(1e) = \partial c^2(1e1)$, таким чином, група циклів Z_2 збігається з групою 2-вимірних меж B_2, і $H_2(\mathbb{C}\Omega_n) = 0$.

Дослідимо випадок $k = 2n$. $C_{2n}(\mathbb{C}\Omega_n)$ – вільна абелева група з $n + 1$ твірними $c^n(1ee\dots e) = a_0$, $c^n(e1e\dots e) = a_1$, $c^n(ee1\dots e) = a_2, \dots$, $c^n(eee\dots 1) = a_n$, при цьому відповідно до (2) $\partial a_k = (-1)^k c^{n-1}(ee\dots e)$. Проаналізуємо довільний ланцюг вимірності $2n$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k a_k,\ m_k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Його межа $\partial \sum\limits_{k=0}^{n} m_k a_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k m_k\right) c^{n-1}(ee\dots e)$, отже, Z_{2n} складається з тих ланцюгів вигляду (5), для яких $m_0 = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} m_k$. Група $2n$-вимірних меж $B_{2n} = 0$, оскільки межа єдиної $2n+1$-вимірної клітини $c^n(ee\dots e)$ дорівнює нулю. Тоді $H_{2n}(\mathbb{C}\Omega_n) = Z_{2n}/B_{2n} = Z_{2n} = \mathbb{Z}^n$.

Перейдемо нарешті до найскладнішого випадку $k = 2n - 1$. Розіб'ємо клітини вимірності $2n - 1$ на три категорії.

1. Клітина $c^{n-1}(ee\dots e)$. Оскільки $c^{n-1}(ee\dots e) = \partial c^n(1e\dots e)$, ця клітина жодним чином не впливає на гомологічну групу.

2. Клітини $c^n(11e\dots e), \dots, c^n(e\dots e11e\dots e), \dots, c^n(e\dots e11)$ із двома одиницями підряд. Відповідно до (2) будь-яка з цих клітин має нульову межу, але жодна з цих клітин сама не є межею жодної клітини простору $\mathbb{C}\Omega_n$. Таким чином, ці клітини – вільні твірні групи $H_{2n-1}(\mathbb{C}\Omega_n)$, а оскільки їх кількість дорівнює n, то

$$H_{2n-1}(\mathbb{C}\Omega_n) = \mathbb{Z}^n \oplus W, \tag{6}$$

де W – наразі невідома абелева група.

3. Клітини $c^n(\ldots 1 \ldots e \ldots 1 \ldots)$ із рівно двома одиницями, розділеними щонайменше одним символом e. Нехай $c_{i_1 i_2} = c^n(u_0 u_1 \ldots u_n)$, де

$$u_k = \begin{cases} 1, & k = i_1, k = i_2; \\ e, & \text{для решти } k. \end{cases}$$

Тоді всі такі клітини мають вигляд $c_{i_1 i_2}, 0 \le i_1 < i_2 - 1 \le n-1$. Згідно з (2) їх межі дорівнюють

$$\partial c_{i_1 i_2} = (-1)^{i_2} c_{i_1} + (-1)^{i_1} c_{i_2 - 1}, \tag{7}$$

де $c_i = c^{n-1}(u_0 u_1 \ldots u_{n-1})$ для

$$u_k = \begin{cases} 1, & k = i; \\ e, & \text{для решти } k. \end{cases}$$

(У праву частину (7) c_{i_2-1} входить із саме таким індексом через зсув нумерації після вилучення одиниці, що стоїть на місці з номером i_1).

Розглянемо ланцюг

$$\sum_{0 \le i_1 < i_2 - 1 \le n-1} m_{i_1 i_2} c_{i_1 i_2}, \quad m_{i_1 i_2} \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

згідно з (7) його межа

$$\partial \left(\sum_{0 \le i_1 < i_2 - 1 \le n-1} m_{i_1 i_2} c_{i_1 i_2} \right) = \sum_{0 \le i_1 < i_2 - 1 \le n-1} \left(m_{i_1 i_2} (-1)^{i_2} c_{i_1} + m_{i_1 i_2} (-1)^{i_1} c_{i_2 - 1} \right) =$$

$$= \sum_{0 \le i_1 < i_2 \le n-1} \left(m_{i_1\, i_2+1} (-1)^{i_2+1} c_{i_1} + m_{i_1\, i_2+1} (-1)^{i_1} c_{i_2} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\sum_{k<i} (-1)^k m_{k\, i+1} + \sum_{k>i} (-1)^{k+1} m_{i\, k+1} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\sum_{0 \le k < i} (-1)^k m_{k\, i+1} + \sum_{i+1 < k \le n} (-1)^k m_{ik} \right).$$

Отже, для того щоб ланцюг (8) був циклом, необхідно й достатньо, щоб

$$\sum_{0 \le k < i} (-1)^k m_{k\, i+1} + \sum_{i+1 < k \le n} (-1)^k m_{ik} = 0, \qquad \overline{i = 0, n-1}.$$

Запишемо цю систему рівнянь у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} m_{02} - m_{03} + m_{04} - \ldots + (-1)^n m_{0n} = 0, & (i = 0); \\ m_{02} - m_{13} + m_{14} - \ldots + (-1)^n m_{1n} = 0, & (i = 1); \\ m_{03} - m_{13} + m_{24} - \ldots + (-1)^n m_{2n} = 0, & (i = 2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ m_{0n} - m_{1n} + m_{2n} - \ldots + (-1)^{n-2} m_{n-2\, n} = 0, & (i = n-1). \end{cases}$$

Зазначимо, що кожна змінна m_{ik} входить до системи двічі: перший раз із знаком $(-1)^k$ в i-те рівняння, другий – із знаком $(-1)^i$ в $(k-1)$-ше (нумерацію рівнянь ведемо з нуля). Підсумуємо всі рівняння, помноживши попередньо кожне з них на $(-1)^i$. Тоді ліва частина одержаної рівності міститиме m_{ik} рівно двічі: перший раз із коефіцієнтом $(-1)^{i+k}$, другий – із коефіцієнтом $(-1)^{i+k-1}$, отже, дорівнюватиме нулю. Це означає, що будь-яке рівняння системи є наслідок інших і може бути з неї вилучене. Відкинувши рівняння системи в разі $i = 0$, запишемо інші у вигляді

$$\begin{cases} m_{02} = m_{13} - m_{14} + \ldots + (-1)^{n-1} m_{1n}; \\ m_{03} = m_{13} - m_{24} + \ldots + (-1)^{n-1} m_{2n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{0n} = m_{1n} - m_{2n} + \ldots + (-1)^{n-1} m_{n-2\,n}. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) є необхідна і достатня умова того, що ланцюг (8) – цикл. Змінні $m_{13}, m_{14}, \ldots, m_{24}, \ldots, m_{n-2\,n}$ у системі (9) можуть набувати будь-яких значень, ранг групи циклів вигляду (8) дорівнює кількості цих змінних. Остання, тобто кількість пар чисел від 1 до n, де $i_1 + 1 < i_2$, дорівнює $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Окільки всі $2n-1$-вимірні межі простору $\mathbb{C}\Omega_n$ кратні $c^{n-1}(ee\ldots e)$, жоден ненульовий ланцюг вигляду (8) не є межею. Отже, з огляду на рівність (6) $H_{2n-1}(\mathbb{C}\Omega_n) = \mathbb{Z}^{n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. Доведення теореми завершено.

Ейлеровою характеристикою топологічного простору E називають суму

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{rank} H_i(E)$$

(вважають, що, починаючи з деякої вимірності, всі групи гомологій тривіальні і сума в правій частині скінченна). Відомо (див. [6, с. 112]), що для скінченного клітинного простору ейлерову характеристику можна знайти, не вдаючись до обчислення груп гомологій, за формулою

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_i, \tag{10}$$

де C_i – кількість i-вимірних клітин простору E. Формула (10) і побудована в [3] клітинна структура дозволяють знайти ейлерову характеристику простору $\mathbb{C}\Omega_n$.

Теорема 2. *Для будь-якого $n \geq 1$ ейлерова характеристика $\chi(\mathbb{C}\Omega_n) = 0$.*

Доведення. Нехай $V_{qk}, 0 \leq q \leq n, 0 \leq k \leq q+1,$ – множина клітин $c^i(u_0 u_1 \ldots u_i)$ простору $\mathbb{C}\Omega_n$, для яких $i = q$, а $h(u_0 u_1 \ldots u_i) = k$ (нагадаємо, що $h(u_0 u_1 \ldots u_i)$ – кількість рівних e символів послідовності $u_0 u_1 \ldots u_i$), $V = \bigcup V_{qk}$ – множина всіх клітин цього простору. Позначивши $\dim v$ вимірність клітини $v \in V$, запишемо формулу (10) у вигляді

$$\chi(\mathbb{C}\Omega_n) = \sum_{v \in V} (-1)^{\dim v}.$$

Оскільки вимірність будь-якої клітини $v \in V_{qk}$ дорівнює $q+k$,

$$\chi\left(\mathbb{C}\Omega_n\right) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{k=0}^{q+1} \sum_{v \in V_{qk}} (-1)^{q+k}.$$

Через те що множини V_{qk} містять по C_{q+1}^{k} елементів, скориставшись відомою рівністю $\sum\limits_{k=0}^{q+1}(-1)^k C_{q+1}^{k} = 0$, одержимо

$$\chi\left(\mathbb{C}\Omega_n\right) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k C_{q+1}^{k} = 0.$$

Доведення теореми завершено.

Бібліографічні посилання

1. К*ощеев, В. А.* Фундаментальные группы пространств обобщённых совершенных сплайнов [Текст] / В. А. Кощеев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, №1. – С. 159–165.
2. П*асько, А. Н.* О гомотопических группах пространств обобщённых совершенных сплайнов [Текст] / А. Н. Пасько // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 2012. – Вип. 17. – С. 138–140.
3. П*асько, А. М.* Однозв'язність одного простору комплекснозначних функцій [Текст] / А. М. Пасько// Там само. – 2015. – Вип. 20. – С. 70–74.
4. Р*убан, В. И.* Клеточное разбиение пространств Ω-сплайнов [Текст] / В. И. Рубан // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Д., 1985. – С. 39–40.
5. Р*убан, В. И.* Клеточная структура и когомологии пространств обобщённых совершенных сплайнов [Текст] / В. И. Рубан // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 1999. – Вип. 4. – С. 85–90.
6. Ф*оменко, А. Т.* Курс гомотопической топологии [Текст] / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989. – 494 с.

Надійшла до редколегії 28.04.2016