ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2017, вип. **22**

УДК 517.5

А. Е. Гайдабура*, **В. А. Кофанов****

* Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49050. *E-mail: gaydaburaa@mail.ru*

** Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

Точные неравенства разных метрик типа Ремеза для наилучших приближений константой

Доказаны новые точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданой функцией сравнения.

Ключевые слова: неравенства разных метрик типа Ремеза, функции сравнения, классы функций с заданой функцией сравнения.

Доведено нові точні нерівності різних метрик типу Ремеза на класах функцій із заданою функцією порівняння.

Ключові слова: нерівності різних метрик типу Ремеза, функції порівняння, класи функцій із заданою функцією порівняння.

It is proved the new sharp Remez-type inequalities of various metrics on the sets of functions with a given comparison function.

Key words: Remez-type inequalities of various metrics, the comparison function, classes of functions with a given comparison function.

Пусть $G \subset \mathbb{R}$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbb{R}$, для которых $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|x\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai} \sup_{t \in G} |x(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

Пусть $d > 0$, I_d – окружность, реализованная в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Для $r \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{R}$ или $G = I_d$, через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Для таких G вместо $\|x\|_{L_\infty(G)}$ будем писать $\|x\|_\infty$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbb{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbb{R})$, если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$\max_{t \in \mathbb{R}} x(t) = \max_{t \in \mathbf{R}} f(t) + \alpha, \qquad \min_{t \in \mathbb{R}} x(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) + \alpha.$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + \alpha$, где $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она обладает свойствами: φ – четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ – выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(\mathbb{R})$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [1], [2]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\{x \in L^r_\infty(\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \le A_0, \;\; \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbb{Z}$).

В теории аппроксимации полиномами важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n, \beta)\, \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \tag{1}$$

на классе T_n, где $B-$ произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta \in (0, 2\pi)$.

Начало этой тематике положила работа [3] Ремеза, в которой он нашел точную константу в неравенстве вида (1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двухсторонние оценки для точных констант $C(n, \beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n, \beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [4] и $\beta \to 0$ [5]. Подробную библиографию работ по данной тематике можно найти в [4]–[7]. В работе [5] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \tag{2}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \frac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$. Этот результат был обобщен в [8], где для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ ($\varphi-$ заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказаны неравенства

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}\, \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)} \tag{3}$$

и

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}\, \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}\,, \tag{4}$$

где $E_0(x)_\infty$– наилучшее равномерное приближение константами функции x. Оба неравенства (3) и (4) являются точными на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращаются в равенство для функции $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$.

В данной статье получено дальнейшее обобщение неравенства (4). Для произвольных $p \in [1, \infty]$, $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$, и измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказано следующее точное неравенство разных метрик типа Ремеза

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}} \|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}$$

на классах $S_\varphi(\omega)$ d-периодических функций x с заданной функцией сравнения φ, где $B_1 := [(\omega - \beta)/2, (\omega + \beta)/2]$, $E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}$– наилучшее приближение функции φ константами в метрике пространства $L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)$ (теорема 1). Как следствие получены точные неравенства разных метрик типа Ремеза на соболевских классах дифференцируемых периодических функций, а также на классах T_n тригонометрических полиномов и пространствах $S_{n,r}$ периодических полиномиальных сплайнов (теоремы 2 – 4).

Пусть α, $y > 0$. Для 2ω-периодической S-функции φ положим

$$E_y^\alpha := \{t \in I_{2\omega} : |\varphi(t) + \alpha| > y\}. \tag{5}$$

Ясно, что для $\beta \in (0, 2\omega)$ существует единственное число $y = y(\beta)$, удовлетворяющее условию

$$\mu E_{y(\beta)}^\alpha = \beta, \tag{6}$$

где μ– мера Лебега.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$. Для любой 2ω-периодической S-функции φ и $\beta \in (0, 2\omega)$ справедливо соотношение*

$$\min_{\alpha > 0} \left\{ \int\limits_{I_{2\omega}\setminus E_{y(\beta)}^\alpha} |\varphi(t) + \alpha|^p dt \right\}^{1/p} = E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)},$$

где $B_1 := \left[\frac{\omega-\beta}{2}, \frac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Доказательство. Достаточно доказать равенство леммы для $p < \infty$. Не ограничивая общности можно считать, что

$$\|\varphi\|_\infty = 1. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) := \int\limits_{I_{2\omega}\setminus E_{y(\beta)}^\alpha} |\varphi(t) + \alpha|^p dt$$

и покажем, что $\min\{f(\alpha):\alpha>0\}$ достигается в промежутке

$$M_\beta := \left[\frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right), 1\right].$$

Для этого рассмотрим два случая:

$$1)\ \alpha\in\left(0,\ \frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right), \qquad 2)\ \alpha>1$$

и докажем, что в обоих случаях

$$f(\alpha)\ge\min\{f(\alpha):\alpha\in M_\beta\}. \tag{8}$$

Пусть сначала $\alpha<\frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$, т. е. $\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\alpha<1-\alpha$. В этом случае существуют такие числа $u,v>0$, $u+v=\beta$, $v\ge u$, что

$$\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha=-\left(\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right),$$

и, ввиду четности функции φ относительно точек $\pm\frac{\omega}{2}$, имеем

$$I_{2\omega}\setminus E^{\alpha}_{y(\beta)}=\left[\frac{\omega-v}{2},\frac{\omega+v}{2}\right]\bigcup\left[\frac{-\omega-u}{2},\frac{-\omega+u}{2}\right].$$

Через $c=c(\alpha)$ обозначим единственный нуль функции $\varphi(t)+\alpha$ в промежутке $[-\omega/2,\omega/2]$. Не ограничивая общности можно считать, что φ возрастает в этом промежутке. Тогда

$$\frac{1}{2}f(\alpha)=\int\limits_{\frac{-\omega+u}{2}}^{c}|\varphi(t)+\alpha|^p dt+\int\limits_{c}^{\frac{\omega-v}{2}}|\varphi(t)+\alpha|^p dt,$$

где $u=u(\alpha)$, $v=v(\alpha)$, причем $u(\alpha)+v(\alpha)=\beta$, а $\beta-$ фиксированно. Следовательно,

$$\frac{1}{2}f'(\alpha)=-p\int\limits_{\frac{-\omega+u}{2}}^{c}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt+p\int\limits_{c}^{\frac{\omega-v}{2}}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt+$$

$$+c'(\alpha)|\varphi(c)+\alpha|^p-\frac{1}{2}u'(\alpha)\left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right|^p-$$

$$-\frac{1}{2}v'(\alpha)\left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|^p-c'(\alpha)|\varphi(c)+\alpha|^p.$$

Так как

$$\varphi(c)+\alpha=0, \qquad \left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right|=\left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|, \qquad u'(\alpha)+v'(\alpha)=0$$

(последнее равенство вытекает из тождества $u(\alpha)+v(\alpha)=\beta$), то

$$\frac{1}{2p}f'(\alpha)=-\int\limits_{\frac{-\omega+u}{2}}^{c}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt+\int\limits_{c}^{\frac{\omega-v}{2}}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt.$$

Поскольку функция φ выпукла вверх на $[0,\omega]$ и нечетна, то для точек

$$t_1\in\left(\frac{-\omega+u}{2},\ c\right), \qquad t_2\in\left(c,\ \frac{\omega-v}{2}\right)$$

удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t_1)+\alpha|=|\varphi(t_2)+\alpha|,$$

выполнено неравенство

$$|\varphi'(t_1)|\le|\varphi'(t_2)|.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство

$$\left|\varphi\left(\frac{-\omega+u}{2}\right)+\alpha\right|=\left|\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha\right|,$$

заключаем, что

$$c-\frac{-\omega+u}{2}\ge\frac{\omega-v}{2}-c$$

и

$$\int\limits_{\frac{-\omega+u}{2}}^{c}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt\ge\int\limits_{c}^{\frac{\omega-v}{2}}|\varphi(t)+\alpha|^{p-1}dt.$$

Таким образом, $f'(\alpha)\le 0$ для $\alpha\in\left(0,\ \frac{1}{2}\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right)$ и неравенство (8) в этом случае доказано.

Пусть теперь $\alpha>1$. Тогда $\varphi(t)+\alpha>0$ для всех $t\in\mathbb{R}$ в силу (7), причем функция $g_t(\alpha):=\varphi(t)+\alpha$ строго возрастает по переменной α при каждом фиксированном t. Поэтому функция $f(\alpha)$ также строго возрастает и не может достигать минимума при $\alpha>1$. Тем самым (8) полностью доказано.

Итак, функция $f(\alpha)$ достигает минимума в промежутке M_β. В этом случае

$$E^{\alpha}_{y(\beta)}=\left[\frac{\omega-\beta}{2},\frac{\omega+\beta}{2}\right]=:B_1$$

и

$$\frac{1}{2}f(\alpha) = \int\limits_{\frac{-\omega}{2}}^{c} |\varphi(t) + \alpha|^p dt + \int\limits_{c}^{\frac{\omega-\beta}{2}} |\varphi(t) + \alpha|^p dt,$$

где $c = c(\alpha)-$ единственный нуль $\varphi(t)+\alpha$ в промежутке $[-\omega/2, \omega/2]$. Предполагая, как и раньше, что φ возрастает в этом промежутке, имеем

$$\frac{1}{2}f'(\alpha) = -p\int\limits_{\frac{-\omega}{2}}^{c} |\varphi(t) + \alpha|^{p-1} dt + p\int\limits_{c}^{\frac{\omega-\beta}{2}} |\varphi(t) + \alpha|^{p-1} dt. \tag{9}$$

Ясно, что при возрастании $\alpha \in M_\beta$ величина $c = c(\alpha)$ убывает. При этом модуль первого интеграла в (9) убывает, а модуль второго - растет. Кроме того, очевидно, что $f'(1) > 0$ и ранее было доказано неравенство

$$f'\left(\frac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)\right) \le 0.$$

Следовательно, минимум функции $f(\alpha)$ достигается в точке $\alpha \in M_\beta$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\frac{-\omega}{2}}^{\frac{\omega-\beta}{2}} |\varphi(t) + \alpha|^{p-1} \mathrm{sgn}(\varphi(t) + \alpha) dt = 0, \tag{10}$$

которое можно переписать в виде

$$\int\limits_{I_{2\omega}\setminus B_1} |\varphi(t) + \alpha|^{p-1} \mathrm{sgn}(\varphi(t) + \alpha) dt = 0.$$

Из последнего равенства в силу критерия элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_p следует утверждение леммы.

Для функции $f \in L_1(I_d)$ через $m(f, y)$, $y > 0$, обозначим ее функцию распределения, определяемую равенством

$$m(f, y) := \mu\{t \in I_d : |f(t)| > y\}, \tag{11}$$

и пусть $r(f, t)-$ убывающая перестановка (см., напр., [9, §1.3]) сужения функции $|f|$ на $[0, d]$. Положим $r(f, t) = 0$ для $t > d$.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $\varphi-$ S-функция с периодом 2ω, $\beta \in (0, 2\omega)$. Для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ и измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, имеет место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}} \|x\|_{L_{L_p}(I_d\setminus B)}, \tag{12}$$

где $B_1 := \left[\frac{\omega-\beta}{2}, \frac{\omega+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (12) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t) - \alpha_p(\varphi, B_1)$ *и множества* $B = B_1$, *где* $\alpha_p(\varphi, B_1)-$ *константа наилучшего приближения функции* φ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)$.

Доказательство. Зафиксируем d-периодическую функцию $x \in S_\varphi(\omega)$. Ввиду однородности неравенства (12) можно считать, что $E_0(x)_\infty = 1$, а поскольку φ является S-функцией, то тогда

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi\|_\infty = 1. \tag{13}$$

При этом существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \max_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t) + \alpha = 1 + \alpha, \qquad \min_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \min_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t) + \alpha = \alpha - 1.$$

Переходя, если нужно, к функции $-x$, можем считать ввиду (13), что $\max\{x(t) : t \in \mathbb{R}\} \geq 1$. Тогда $\alpha \geq 0$.

Пусть для определенности функция φ возрастает на $[-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$. Для $\tau \in \mathbb{R}$ положим $x_\tau(t) := x(\tau + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$x_{\tau_1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \max_{t\in\mathbb{R}} x(t) = 1 + \alpha, \qquad x_{\tau_2}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \min_{t\in\mathbb{R}} x(t) = \alpha - 1.$$

Так как φ является функцией сравнения для x, то

$$(x_{\tau_1}(t))_+ \geq (\varphi(t) + \alpha)_+ \,, \qquad \left|t - \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{14}$$

и

$$(x_{\tau_2}(t))_- \geq (\varphi(t) + \alpha)_- \,, \qquad \left|t + \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{15}$$

где $u_\pm := \max\{\pm\ u, 0\}$. Отметим, что из (14) и (15), в частности, следует соотношение $d \geq 2\omega$, и кроме того, неравенства

$$m(x_\pm, y) \geq m((\varphi(\cdot) + \alpha)_\pm, y), \quad y \geq 0,$$

где функция $m(f, y)$ определена соотношением (11). Следовательно,

$$m(x, y) \geq m(\varphi(\cdot) + \alpha, y), \quad y \geq 0.$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$r(x, t) \geq r(\varphi(\cdot) + \alpha, t), \quad t \geq 0. \tag{16}$$

Заметим, что для любого измеримого множества $B \subset I_d$, $\mu B \leq \beta$, имеет место неравенство

$$\int\limits_B |x(t)|^p dt \leq \int\limits_0^\beta r^p(x, t) dt,$$

а так как перестановка сохраняет L_p-норму функции, то

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} = \int\limits_{I_d} |x(t)|^p dt - \int\limits_{B} |x(t)|^p dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^d r^p(x,t)dt - \int\limits_0^\beta r^p(x,t)dt = \int\limits_\beta^d r^p(x,t)dt.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (16) и соотношение $d \geq 2\omega$, получаем

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} \geq \int\limits_\beta^{2\omega} r^p(\varphi(\cdot)+\alpha,t)dt = \int\limits_{I_{2\omega} \setminus E^\alpha_{y(\beta)}} |\varphi(t)+\alpha|^p dt,$$

где $E^\alpha_{y(\beta)}$ определено равенствами (5) и (6). Теперь, применяя лемму 1, заключаем, что для любого измеримого множества B, $\mu B \leq \beta$, справедливо неравенство

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)} \geq E_0(\varphi)_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)},$$

из которого ввиду (13) сразу следует (12). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают неравенства разных метрик типа Ремеза для функций класса $L^r_\infty(I_{2\pi})$, а также для тригонометрических полиномов и сплайнов.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S-функцией с периодом $2\pi/\lambda$.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $\beta \in (0,2\pi)$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ и произвольного измеримого множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, где $\lambda = \left(\frac{K_r\|x^{(r)}\|_\infty}{E_0(x)_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}$, имеет место неравенство*

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{17}$$

где $\alpha = \frac{r}{r+1/p}$, $B_1 := \left[\frac{\pi-\beta}{2}, \frac{\pi+\beta}{2}\right]$.

Неравенство (17) является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t) - \alpha_p(\varphi_r, B_1)$ и множества $B = B_1$, где $\alpha_p(\varphi_r, B_1)-$ константа наилучшего приближения функции φ в метрике пространства $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1)$.

Теорема 3. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если тригонометрический полином* $T \in T_n$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(T)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{E_0(\sin n(\cdot))_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}}, \tag{18}$$

где $B_1^m = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \left\{B_1^{m,n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}$, $\qquad B_1^{m,n} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{m}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\beta}{m}\right)\right]$.

Неравенство (18) является точным и обращается в равенство для полинома $T(t) = \sin nt - \alpha_p(\sin n(\cdot), B_1^m)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p(\sin n(\cdot), B_1^m)$*– константа наилучшего приближения функции* $\sin n(\cdot)$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Теорема 4. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \le n$, $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. *Если сплайн* $s \in S_{n,r}$ *имеет минимальный период* $2\pi/m$, *то для любого измеримого множества* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, *имеет место неравенство*

$$E_0(s)_\infty \le \left(\frac{n}{m}\right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}{E_0(\varphi_{n,r})_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1^m)}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}\,, \tag{19}$$

где $B_1^m = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \left\{B_1^{m,n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}$, $\qquad B_1^{m,n} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{m}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\beta}{m}\right)\right]$.

Неравенство (19) является точным и обращается в равенство для сплайна $s(t) = \varphi_{n,r}(t) - \alpha_p(\varphi, B_1^m)$ *и множества* $B = B_1^m$, *где* $\alpha_p(\varphi_{n,r}, B_1^m)$*– константа наилучшего приближения сплайна* $\varphi_{n,r}$ *в метрике пространства* $L_p(I_{2\pi} \setminus B_1^m)$.

Библиографические ссылки

1. *Bojanov, B.* An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos [Text] / B. Bojanov, N. Naidenov// Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – 78. – P. 263 – 280.
2. *Кофанов, В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сранения [Текст] / В. А. Кофанов// Укр. мат. журн. – 2011. – 63, 7. – С. 969 – 984.
3. *Remes, E.* Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef [Text] /E. Remes // Записки науково-дослідного інституту математики й механіки та харківського математичного товариства. Харківський державний університет.– Харьков: 1936.– сер. 4, т. 13, вип. 1.– С. 93 – 95.
4. *Ganzburg, M. I.* On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials [Text]/ M. I. Ganzburg // Journal of Approximation Theory. – 2012. – 164. – P. 1233 – 1237.
5. *Nursultanov, E.* A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials [Text]/ E. Nursultanov, S. Tikhonov // Consructive Approximation. – 2013. – 38. – P. 101 – 132.

6. *Borwein, P.* Polynomials and polynomial inequalities. [Text]/ P. Borwein, T. Erdelyi // New York: Springer, 1995.
7. *Ganzburg, M. I.* Polynomial inequalities on measurable sets and their applications [Text]/ M. I. Ganzburg //Consructive Approximation. – 2001. – 17. – P. 275 – 306.
8. *Кофанов, В. А.* Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов [Текст] / В. А. Кофанов// Укр. мат. журн. – 2016. – 68, 2. – С. 227 – 240.
9. *Корнейчук, Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун// К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.

Надійшла до редколегії 10.03.2017