ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2015, вип. **20**

УДК 517.5

Б. И. Пелешенко, Т. Н. Семиренко
Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет

О сходимости интегралов Фурье и пространствах Липшица, определяемых с помощью разностей дробного порядка

Получены необходимые и достаточные условия в терминах преобразований Фурье $\hat{f}$ функций $f \in L^1(\mathbb{R})$ для того, чтобы f принадлежали классам Липшица $H^\omega(\mathbb{R})$, $h^\omega(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: преобразование Фурье, интеграл Фурье, модуль непрерывности, классы Липшица.

Одержано необхiднi та достатнi умови в термiнах перетворень Фур'є $\hat{f}$ функцiй $f \in L^1(\mathbb{R})$ для того, щоб f належали просторам Лiпшиця $H^\omega(\mathbb{R})$, $h^\omega(\mathbb{R})$.

Ключовi слова: перетворення Фур'є, iнтеграл Фур'є, модуль неперервностi, класи Лiпшиця.

The necessary and sufficient conditions in terms of Fourier transforms $\hat{f}$ of functions $f \in L^1(\mathbb{R})$ are obtained for f to belongs of the Lipschitz classes $H^\omega(\mathbb{R})$, $h^\omega(\mathbb{R})$.

Key words: Fourier transform, Fourier integral, modulus of continuity, Lipschitz classes.

Пусть символами $L^1(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$ обозначаются соответственно пространства интегрируемых по Лебегу и непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Известно [1], что для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ её преобразование Фурье $\hat{f}(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией, которая может быть неинтегрируемой на $\mathbb{R}$.

В случае когда $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, интеграл Фурье $f_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}dx :=$ $:= \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_a^b \hat{f}(t)e^{itx}dx$ является непрерывной функцией и $f_1(x) = f(x)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Если же $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, тогда $f_1(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для $\alpha \in (0;\infty)$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ разность порядка α функции f определяется формулой $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$, где $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. В частности, когда α - целое положительное число, то $\binom{\alpha}{\alpha+j} = 0$ для $j \in \mathbb{N}$ и $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$.

Пусть $\omega : [0;\infty) \to [0,\infty)$ - непрерывная неубывающая функция такая, что $\omega(0) = 0$, $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает, для всякого $\delta > 0$ выполняется неравенство $\omega(2\delta) \le C(\alpha)\omega(\delta)$ с $C(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right|$. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то $C(\alpha) = 2^\alpha$.

Через $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ обозначается класс таких непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которые удовлетворяют для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ неравенству $|\Delta_t^\alpha f(x)| \le K\omega(t)$, где K зависит только от функции f и не зависит от аргумента x и t.

Класс $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ состоит из функций $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, для каждой из которых выполняется условие $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\Delta_t^\alpha f(x)|}{\omega(t)} = 0$ равномерно для всех $x \in \mathbb{R}$.

В работе Ф. Морица [2] получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, для принадлежности f одному из классов Липшица $H^\alpha(\mathbb{R})$ и $h^\alpha(\mathbb{R})$. Соответствующие условия принадлежности $f \in L^1(\mathbb{R})$ классам $H^\omega(\mathbb{R})$ или $h^\omega(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей первого порядка и модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию Бари–Стечкина, получены в [3]. В данной статье установлены условия принадлежности $f \in L^1(\mathbb{R})$ классам $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей порядка α и функций $\omega(t)$ типа модулей непрерывности α-го порядка.

Пусть Φ - множество возрастающих непрерывных функций $\phi : [0;\infty) \to [0;\infty)$, удовлетворяющих Δ_2-условию и таких, что $\phi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$.

Сформулируем полученные утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такая, что $f \in L \cap C(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ и $\alpha \ne 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, функция $\omega(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и существует такая постоянная $M_1 > 0$, что для всякого $t > 0$*

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \le M_1 \omega(t). \tag{1}$$

Если для любого $y > 0$

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^\alpha |\hat{f}(t)| dt = O\left(y^\alpha \omega\left(y^{-1}\right)\right), \tag{2}$$

то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ и $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Обратно предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\hat{f}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и условию (1). Если $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(t) \ge 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то тогда (2) выполняется.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ и $\alpha \ne 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, функция $\omega(t)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и существуют такие постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, что*

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \le M_1 \omega(t), \quad \int\limits_t^\infty \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du \le M_2 \frac{\omega(t)}{t^\alpha}. \tag{3}$$

Если

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^{\alpha}|\hat{f}(t)|dt = o\left(y^{\alpha}\omega\left(y^{-1}\right)\right) \quad y \to \infty, \tag{4}$$

то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f \in h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\hat{f}$ *принадлежат* $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и условиям* (3). *Если* $f \in h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ *и* $\hat{f}(t) \geq 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, *то тогда* (4) *выполняется.*

Теорема 3. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такая, что* $f \in L \cap C(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, *функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и существует такая постоянная* $M_1 > 0$, *что для всякого* $t > 0$

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq M_1\omega(t).$$

Если для любого $y > 0$

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^{2k-1}|\hat{f}(t)|dt = O\left(y^{2k-1}\omega\left(y^{-1}\right)\right), \tag{5}$$

то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f \in H_C^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$.

Обратно предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\hat{f}$ *принадлежат* $L_\infty(\mathbf{R})^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и условию* (1). *Если* $f \in H_C^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$ *и* $t\hat{f}(t) \geq 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, *то тогда* (5) *выполняется.*

Теорема 4. *Пусть функция* $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, *функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и существуют такие постоянные* $M_1 > 0$, $M_2 > \quad > 0$, *что*

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq M_1\omega(t), \quad \int\limits_t^\infty \frac{\omega(u)}{u^{2k}} du \leq M_2\frac{\omega(t)}{t^{2k-1}}. \tag{6}$$

Если

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^{2k-1}|\hat{f}(t)|dt = o\left(y^{2k-1}\omega\left(y^{-1}\right)\right) \quad \text{при } y \to \infty, \tag{7}$$

то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f \in h_C^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$.

Предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\hat{f}$ *принадлежат* $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и условиям* (6). *Если* $f \in h_C^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$ *и* $t\hat{f}(t) \geq 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, *то тогда* (7) *выполняется.*

Доказательство этих теорем основывается на следующих утверждениях, обобщающих вспомогательные леммы из работы [2].

Лемма 1. *Пусть функции $\phi(t) \in \Phi$ и $\psi(t) = signt$, $t \geq 0$ или $\psi \in \Phi$ такие, что $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ убывает на $(0, \infty)$ и существует такая постоянная $M_1 > 0$, что для любого $x > 0$*

$$\int\limits_x^\infty \frac{\psi(t)}{t\phi(t)} dx \leq M_1 \frac{\psi(x)}{\phi(x)}. \tag{8}$$

Если $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и для любого $y > 0$

$$\int\limits_0^y \phi(t)g(t)dt = O\left(\psi\left(y\right)\right), \tag{9}$$

тогда $g \in L^1(y, \infty)$ и для любого $y > 0$

$$\int\limits_y^\infty g(t)dt = O\left(\frac{\psi(y)}{\phi(y)}\right). \tag{10}$$

Обратно, если $\phi(t), \psi(t) \in \Phi$ и $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ не возрастает на $(0, \infty)$, выполняется условие (10) *и существует такая постоянная $M_2 > 0$, что*

$$\int\limits_0^x \frac{\psi(t)}{t} dt \leq M_2 \psi(x) \qquad \text{для любого } x > 0, \tag{11}$$

то $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и условие (9) *выполняется.*

Доказательство леммы 1. Пусть $t = 2^m$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда из условия возрастания $\phi(t)$ и (4) следует, что существует такое $C_1 > 0$, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$\phi(2^m) \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \leq \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \phi(t)g(t)dt \leq \int\limits_0^{2^{m+1}} \phi(t)g(t)dt \leq C_1 \psi(2^{m+1}).$$

Отсюда, учитывая, что для функции $\psi(t)$ выполняется Δ_2-условие, и используя условие (8), получаем неравенства

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \leq C_1 \frac{\psi^{(2^{m+1})}}{\phi(2^m)} \leq C_1\gamma \frac{\psi^{(2^m)}}{\phi(2^m)}, \quad \int\limits_{2^m}^\infty g(t)dt \leq C_1\gamma \sum_{k=m}^\infty \frac{\psi(2^k)}{\phi(2^k)} \leq C_2 \frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)}.$$

Неравенство (10) доказано для $y = 2^m$. В случае $0 < y < \infty$ определяем такое $m \in \mathbb{Z}$, что $2^m < y < 2^{m+1}$, и оцениваем

$$\int\limits_y^\infty g(t)dt \leq \int\limits_{2^m}^\infty g(t)dt \leq C_2 \frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)} \leq C_2\gamma \frac{\psi(2^m)}{\phi(2^{m+1})} \leq C_2\gamma \frac{\psi(y)}{\phi(y)}.$$

Докажем обратное утверждение леммы. Из условия (10) следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}$

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \le \int\limits_{2^m}^{\infty} g(t)dt \le C_3 \frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{2^{m-1}}^{2^m} \phi(t)g(t)dt \le \phi(2^m) \int\limits_{2^{m-1}}^{2^m} g(t)dt \le C_3\gamma\phi(2^{m-1})\frac{\psi(2^{m-1})}{\phi(2^{m-1})} = C_3\gamma\psi(2^{m-1}).$$

Из полученного неравенства и условия (11) следует, что

$$\int\limits_{0}^{2^m} \phi(t)g(t)dt \le C_3\gamma \sum_{k=-\infty}^{m} \psi(2^{k-1}) \le C_4\psi(2^m)$$

для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Если $0 < y < \infty$, то определим $m \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $2^m < y < 2^{m+1}$, тогда

$$\int\limits_{0}^{y} \phi(t)g(t)dt \le \int\limits_{0}^{2^{m+1}} \phi(t)g(t)dt \le C_4\psi(2^{m+1}) \le C_4\gamma\psi(2^m) \le C_4\gamma\psi(y).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ из множества Φ такие, что $\frac{\psi(t)}{\phi(t)}$ убывает на полуоси $(0,\infty)$ и выполняются условия (8) и (11).*

Если $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и

$$\int\limits_{0}^{y} \phi(t)g(t)dt = o\left(\psi(y)\right), \quad \text{когда } y \to \infty, \tag{12}$$

тогда $g \in L^1(y,\infty)$ для достаточно больших значений y, а

$$\int\limits_{y}^{\infty} g(x)dx = o\left(\frac{\psi(y)}{\phi(y)}\right) \quad \text{при } y \to \infty. \tag{13}$$

Обратно, если $\frac{\psi(t)}{\phi(t)}$ убывает на $(0,\infty)$, выполняются условия (10), (13), тогда $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и условие (12) выполняется.

Доказательство леммы 2. Ограничимся случаем $y = 2^m$, где $m \in \mathbb{Z}$, в случае $0 < y < \infty$ рассуждаем так же, как и при доказательстве леммы 1. Из условия (12) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m_0 = m(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, что для любого $m \geq m_0$ выполняется неравенство

$$\phi\left(2^m\right) \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \leq \int\limits_{0}^{2^{m+1}} \phi(t)g(t)dt \leq \varepsilon\psi\left(2^{m+1}\right).$$

Учитывая возрастание $\phi(t)$, а также используя тот факт, что функция $\psi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, и применяя условие (8), получаем, что для любого натурального $m \geq m_0$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \leq \varepsilon\gamma\frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)} \text{ и } \int\limits_{2^m}^{\infty} g(t)dt \leq \varepsilon\gamma\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\psi(2^k)}{\phi(2^k)} \leq \varepsilon\gamma M_1\frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ можно выбирать произвольно малым, то асимптотическая оценка (13) получена.

Пусть выполняется условие (13), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m_0 = m(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, что

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} g(t)dt \leq \int\limits_{2^m}^{\infty} g(t)dt \leq \varepsilon\frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)} \text{ и } \int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \phi(t)g(t)dt \leq \varepsilon\gamma\phi(2^m)\frac{\psi(2^m)}{\phi(2^m)} = \varepsilon\gamma\psi(2^m)$$

для любого $m \geq m_0$.

Из полученного второго неравенства и условия (11) следует неравенство

$$\int\limits_{2^{m_0}}^{2^m} \phi(t)g(t)dt \leq \varepsilon\gamma\sum_{i=m_0}^{m-1}\psi\left(2^i\right) \leq \varepsilon\gamma\psi\left(2^m\right). \tag{14}$$

При доказательстве леммы 1 установлено, что при выполнении условия (10) выполняется и неравенство $\int\limits_0^{2^{m_0}} \phi(t)g(t)dt \leq C_4\psi\left(2^{m_0}\right)$. Учитывая этот факт, неравенство (14) и условие $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x) = \infty$, получаем для достаточно больших чисел m оценку

$$\int\limits_{0}^{2^m} \phi(t)g(t)dt \leq C_4\psi\left(2^{m_0}\right) + \varepsilon\gamma\psi\left(2^m\right) = \left(C_4\frac{\psi\left(2^{m_0}\right)}{\psi\left(2^m\right)} + \varepsilon\gamma\right)\psi\left(2^m\right) \leq \left(C_4 + \gamma\right)\varepsilon\psi\left(2^m\right).$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбирается произвольно, то получаем (12) в случае $y = 2^m$. Для произвольного $y > 0$ проводим те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Докажем первую часть теоремы. Из условия (2) и первой части леммы 1 следует, что $\int\limits_{|t|>y} |\hat{f}(t)|dt = O\left(\omega\left(y^{-1}\right)\right)$ для любого $y > 0$. Учитывая, что $f \in L(\mathbb{R})$ и значит ее преобразование Фурье $\hat{f}(t)$ ограничено, получаем $\hat{f}(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, тогда

$$\left(\widehat{\Delta_h^\alpha f}\right)(t) = \left(1 - e^{-ith}\right)^\alpha \hat{f}(t) = e^{i\frac{th\alpha}{2}} \left(e^{-i\frac{th}{2}} - e^{i\frac{th}{2}}\right)^\alpha \hat{f}(t) =$$
$$= e^{i\frac{th\alpha}{2}} \left(-2i \sin\frac{th}{2}\right)^\alpha \hat{f}(t) = e^{i\frac{th\alpha}{2}} \left|2\sin\frac{th}{2}\right|^\alpha \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha sign \sin\frac{th}{2}} \hat{f}(t).$$

Так как

$$|\Delta_h^\alpha f(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Delta_h^\alpha f}(t) e^{ixt} dt\right| \leq \int\limits_{|t|\leq 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt$$

и неравенство $\left|2\sin\frac{th}{2}\right| \leq \min\{2, h|t|\}$ верно для любого $t \in \mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{|t|\leq 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \leq 2^\alpha \int\limits_{|t|\leq 1/h} \left|\min\left\{1, 2^{-\alpha}|t|^\alpha h^\alpha\right\}\right| \left|\hat{f}(t)\right| dt = h^\alpha \int\limits_{|t|\leq 1/h} |t|^\alpha |\hat{f}(t)| dt.$$

Затем, используя условие (2) теоремы, получаем для любого $h > 0$

$$\int\limits_{|t|\leq 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \leq C h^\alpha h^{-\alpha} \omega(h) = C\omega(h). \tag{15}$$

Из неравенства $\int\limits_{|t|\leq 1/h} |t|^\alpha |f(t)| dt \leq C h^{-\alpha}\omega(h)$, первой части леммы 1, применяемой в случае, когда $\psi(t) = t^\alpha \omega(t^{-1})$, $\phi(t) = t^\alpha$, следует неравенство

$$\int\limits_{|t|>1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt \leq 2C \frac{h^{-\alpha}\omega(h)}{h^{-\alpha}} = 2C\omega(h).$$

Тогда

$$\int\limits_{|t|\geq 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \leq 2^\alpha \int\limits_{|t|\geq 1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt = 2^{1+\alpha} C\omega(h). \tag{16}$$

Учитывая неравенства (15), (16), окончательно получаем для любого $h > 0$

$$|\Delta_h^\alpha f(x)| \leq \int\limits_{|t|\leq 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \leq \left(1 + 2^{1+\alpha}\right) C\omega(h),$$

т.е. $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\hat{f}(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию теоремы. Так как по условию $f \in \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, то тогда для этой функции и для любого $h > 0$ существует такое $C = C(f) > 0$, что

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(-2i \sin \frac{ht}{2}\right)^{\alpha} dt \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(e^{-i\frac{ht}{2}} - e^{i\frac{ht}{2}}\right)^{\alpha} dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(1 - e^{iht}\right)^{\alpha} e^{-i\frac{\alpha ht}{2}} dt \right| = \left| \Delta_h^{\alpha} f \left(-\frac{\alpha h}{2}\right) \right| \leq C\omega(h).$$

Для $h > 0$ обозначим $E_h = \left\{t \in \mathbb{R} : \sin \frac{ht}{2} \geq 0\right\}$ и $F_h = \left\{t \in \mathbb{R} : \sin \frac{ht}{2} < 0\right\}$, тогда

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(-2i \sin \frac{ht}{2}\right)^{\alpha} dt \right| = \left| \int\limits_{E_h} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} dt + \int\limits_{F_h} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) dt + i \int\limits_{F_h} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) dt - \right.$$

$$\left. -i \int\limits_{E_h} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) dt \right| \leq C\omega(h).$$

Оценивая абсолютную величину действительной части, получаем неравенство

$$\left|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right| \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} dt \right| \leq C\omega(h).$$

Так как $\cos \frac{\pi\alpha}{2} \neq 0$, когда $\alpha \neq 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2 \sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} dt \right| \leq C \frac{\omega(h)}{2^{\alpha} \left|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|}.$$

Далее, используя неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin t|$, $0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}$, условие $\hat{f}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, заключаем, что

$$\frac{2^{\alpha} h^{\alpha}}{2^{\alpha} \pi^{\alpha}} \int\limits_{|t| \leq 1/h} |t|^{\alpha} \hat{f}(t) dt \leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|\sin \frac{ht}{2}\right|^{\alpha} dt \right| \leq C \frac{\omega(h)}{2^{\alpha} \left|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|}.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha \hat{f}(t)dt \le C\frac{\pi^\alpha}{2^\alpha \left|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|}\frac{\omega(h)}{h^\alpha}.$$

Отметим, что в случае $\alpha = 2k$, $\left|\Delta_h^{2k} f(x)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k} dt\right|$ и, следовательно, для любого $h > 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \hat{f}(t)t^{2k}dt \le \frac{C\pi^{2k}}{2^{2k}}\frac{\omega(h)}{h^{2k}}.$$

Принимая $y = \dfrac{1}{h}$, получаем (2).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ и $h > 0$. Предположим, что выполняется условие (4), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $y_0 = y_0(\varepsilon) > 0$, что для всякого $y > y_0$

$$\int\limits_{|t|\le y} |t|^\alpha |\hat{f}(t)dt \le \varepsilon y^\alpha \omega\left(\frac{1}{y}\right).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, используя неравенство $\left|2sin\dfrac{ht}{2}\right| \le$ $\le min\left\{2, h|t|\right\}$ и (5), получаем для любого $0 < h < \dfrac{1}{y_0}$

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt = \int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\left(-2sin\frac{th}{2}\right)^\alpha \hat{f}(t)\right| dt \le$$
$$\le h^\alpha \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha |\hat{f}(t)| dt \le \varepsilon h^\alpha h^{-\alpha}\omega(h) = \varepsilon\omega(h).$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбирается произвольно, то

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} |\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)|dt = o\left(\omega\left(h\right)\right), \text{когда} \quad h \to 0. \tag{17}$$

Для оценки интеграла $\int\limits_{|t|>1/h} |\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)|dt$ воспользуемся неравенством $\int\limits_{|t|<1/h} |t|^\alpha |\hat{f}(t)|dt \le \varepsilon h^{-\alpha}\omega(h)$, верным для всякого $h < h_0 = \dfrac{1}{y_0}$, и первым утверждением леммы 2 в случае, когда $\psi(t) = t^\alpha \omega\left(t^{-1}\right)$ и $\phi(t) = t^\alpha$. Полагая

$y = \dfrac{1}{h}$, получаем

$$\int\limits_{|t|>1/h} |\hat{f}(t)|dt = 2h^{\alpha} o\left(h^{-\alpha}\omega(h)\right) = o\left(\omega\left(h\right)\right), \text{ когда } h \to 0. \tag{18}$$

Из неравенства

$$|\Delta_h^{\alpha} f(x)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t) e^{ixt} dt \right| \le \int\limits_{|t|\le 1/h} \left| \widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t) \right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left| \widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t) \right| dt,$$

асимптотических оценок (17), (18) следует, что $f \in h_{\mathbb{C}}^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$. Первая часть теоремы 2 доказана.

Далее предположим обратное, что $f \in h_{\mathbb{C}}^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и $h \in (0, h_0)$ выполняется неравенство $|\Delta_h^{\alpha} f(x)| \le \varepsilon\omega(h)$. Аналогично доказательству теоремы 1 устанавливаем, что в случае $0 < \alpha < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $h \in (0, h_0)$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left| \sin \frac{ht}{2} \right|^{\alpha} dt \right| \le \varepsilon \frac{\omega(h)}{2^{\alpha} \left|\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|}.$$

Также используя неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \le |\sin t|$, $0 \le |t| \le \frac{\pi}{2}$ и условие $\hat{f}(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$, получаем неравенство

$$\frac{2^{\alpha}h^{\alpha}}{2^{\alpha}\pi^{\alpha}} \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^{\alpha} \hat{f}(t) dt \le \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left| \sin \frac{ht}{2} \right|^{\alpha} dt \le \varepsilon \frac{\omega(h)}{2^{\alpha} \left|cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|}. \tag{19}$$

Из (19) следует, что для любого $h > 0$

$$\int\limits_{|t|<1/h} |t|^{\alpha} \hat{f}(t) dt \le \frac{\pi^{\alpha}\varepsilon}{2^{\alpha}\left|cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|} \frac{\omega(h)}{h^{\alpha}}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбираем произвольно, то $\int\limits_{|t|<1/h} |t|^{\alpha} \hat{f}(t) dt = 0\left(\dfrac{\omega(h)}{h^{\alpha}}\right)$, когда $h \to 0$.

Полагая $y = \dfrac{1}{h}$, получаем, что $\int\limits_{|t|<y} |t|^{\alpha} \hat{f}(t) dt = o\left(y^{\alpha}\omega\left(y^{-1}\right)\right)$ при $y \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Повторяя доказательство первой части теоремы 1, сначала получаем

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\Delta_h^{2k-1} f(t)\right| dt \le h^{2k-1} \int\limits_{|t|\le 1/h} t^{2k-1} \left|\hat{f}(t)\right| dt \le C h^{2k-1} h^{-(2k-1)} \omega(h) = C\omega(h). \tag{20}$$

Затем, применяя первую часть леммы 1, из неравенства $\int\limits_{|t|\leq 1/h} |t|^{2k-1}\left|\hat{f}(t)\right| dt \leq$ $\leq Ch^{-(2k-1)}\omega(h)$ получаем

$$\int\limits_{|t|>1/h} \left|\Delta_h^{2k}\hat{f}(t)\right| dt \leq \int\limits_{|t|>1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt \leq 2C\frac{h^{2k-1}\omega(h)}{h^{2k-1}} = 2C\omega(h). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует первое утверждение теоремы 3.

Докажем второе утверждение теоремы 3. Пусть $t\hat{f}(t) \geq 0$ при всяком $t \in \mathbb{R}$ и функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию теоремы. Так как $f \in H_{\mathbb{C}}^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$, то существует такое $C = C(f) > 0$, что для любого $h > 0$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(2\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k-1} dt\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(-2i\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k-1} dt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(1-e^{iht}\right)^{2k-1} e^{-i\frac{(2k-1)ht}{2}} dt\right| = \left|\Delta_h^{2k-1} f\left(-\frac{(2k-1)h}{2}\right)\right| \leq C\omega(h).$$

Из условия $t\hat{f}(t) \geq 0$ следует, что для всякого $h > 0$ подынтегральная функция $\hat{f}(t)\left(2\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k-1} = ht\hat{f}(t)\left(\frac{2}{ht}\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k-1} \geq 0$, поэтому

$$C\int\limits_0^h \omega(x)dx \geq \int\limits_0^h \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(2\sin\frac{xt}{2}\right)^{2k-1} dt\right| dx = \int\limits_0^h \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left(2\sin\frac{xt}{2}\right)^{2k-1} dt\right) dx.$$

Применяя теорему Фубини и неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin t|$, верное при $0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}$, получаем

$$C\int\limits_0^h \omega(x)dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}(t)\int\limits_0^h \left(2\sin\frac{xt}{2}\right)^{2k-1} dx\right) dt =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}(t)t^{2k-1}\int\limits_0^h x^{2k-1}\left(\frac{2}{xt}\sin\frac{xt}{2}\right)^{2k-1} dx\right) dt \geq$$
$$\geq \int\limits_{|t|\leq 1/h} \left(\hat{f}(t)t^{2k-1}\int\limits_0^h x^{2k-1}\left(\frac{2}{xt}\sin\frac{xt}{2}\right)^{2k-1} dx\right) dt \geq$$
$$\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k-1}\frac{1}{2k}h^{2k}\int\limits_{|t|\leq 1/h} \hat{f}(t)t^{2k-1}dt.$$

По условию функция $\omega(t)$ не убывает на $[0,\infty)$, поэтому

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \hat{f}(t)t^{2k-1}dt \le 2k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} C\frac{h\omega(h)}{h^{2k}} = \frac{k\pi^{2k-1}}{2^{2k-2}}C\frac{\omega(h)}{h^{2k-1}}.$$

Полагая $y=\dfrac{1}{h}$, получаем (5).

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Теорема доказывается аналогично рассуждениям, применяемым при доказательстве теоремы 3, только вместо леммы 1 используется лемма 2. Пусть функция $f\in L^1\cap C(\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$, и $h>0$. Предположим, что выполняется условие (7), тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $y_0=y_0(\varepsilon)>0$, что для всякого $y>y_0$

$$\int\limits_{|t|\le y} |t|^{2k-1}\left|\hat{f}(t)\right|dt \le \varepsilon y^{2k-1}\omega\left(\frac{1}{y}\right).$$

Так же как и при доказательстве теоремы 3, используя неравенство $\left|2\sin\dfrac{ht}{2}\right| \le$ $\le min\left\{2,h|t|\right\}$ и (7), получаем для любого $0<h<\dfrac{1}{y_0}$

$$\int\limits_{|t|\le 1/h}\left|\widehat{\Delta_h^{2k-1}f}(t)\right|dt \le h^{2k-1}\int\limits_{|t|\le 1/h}|t|^{2k-1}|\hat{f}(t)|dt \le \varepsilon\omega(h).$$

Так как $\varepsilon>0$ выбирается произвольно, то

$$\int\limits_{|t|\le 1/h}\left|\widehat{\Delta_h^{2k-1}f}(t)\right|dt = 0\left(\omega\left(h\right)\right),\ \text{когда } h\to 0. \tag{22}$$

Из неравенства $\int\limits_{|t|<1/h}|t|^{2k-1}\left|\hat{f}(t)\right|dt \le \varepsilon h^{-(2k-1)}\omega(h)$, первого утверждения леммы 2 и произвольного выбора $\varepsilon>0$ следует, что

$$\int\limits_{|t|>1/h}\left|\hat{f}(t)\right|dt = 2h^{2k-1}o\left(h^{-(2k-1)}\omega\left(h\right)\right),\ \text{когда } h\to 0 \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем первое утверждение теоремы 4.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $f\in h_C^{\omega,2k-1}(\mathbb{R})$, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h_0=h_0(\varepsilon)>0$, что для любого $x\in\mathbb{R}$ и $h\in(0,h_0)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)\left(2\sin\frac{ht}{2}\right)^{2k-1}dt\right| \le \varepsilon\omega(t).$$

Используя условие $t\hat{f}(t) \geq 0$ и применяя теорему Фубини, неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \leq$ $\leq |\sin t|$, верное при $0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\int\limits_{|t|\leq 1/h} \hat{f}(t)t^{2k-1}dt \leq \frac{k\pi^{2k-1}}{2^{2k-2}}\varepsilon\frac{\omega(h)}{h^{2k-1}}.$$

Полагая $h = \frac{1}{y}$ и учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получаем (7).

Теорема 4 доказана.

Библиографические ссылки

1. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах /И. Стейн, Г. Вейс. — М., 1974. —333 с.
2. *Moricz F.* Absolutely convergent Fourier integrals and classical function spaces // F. Moritz // Arch. Math. —2008. —№91. —P. 49–62.
3. *Пелешенко Б. И.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье и классы Липшица // Б. И. Пелешенко // Вісн.ДНУ. Сер.: Математика. — 2011. — Вип. 16. — С. 102–108.

Надійшла до редколегії 04.01.2015