УДК 517.5

С. Б. Вакарчук
Университет имени Альфреда Нобеля,
Днепр, 49000. *E-mail: sbvakarchuk@gmail.com*

О наилучшей полиномиальной аппроксимации (ψ, β)-дифференцируемых функций в пространстве L_2

На классах $L^{\psi}_{\beta,2}$ получены точные оценки величин наилучших полиномиальных приближений (ψ, β)-дифференцируемых функций, выраженные через осредненный с весом $\xi(t)$ модуль непрерывности $\widehat{\omega}(f^{\psi}_{\beta}, t)$, введенный К.В.Руновским и Х.Ю.Шмейссером.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, модуль непрерывности, (ψ, β)-производные, ряд Фурье.

На класах $L^{\psi}_{\beta,2}$ отримано точнi оцiнки величин найкращих полiномiальних наближень (ψ, β)-диференцiйовних функцiй, виражeнi через осереднений з вагою $\xi(t)$ модуль неперервностi $\widehat{\omega}(f^{\psi}_{\beta}, t)$, який було введено К.В.Руновським та Х.Ю.Шмейссером.

Ключовi слова: найкраще полiномiальне наближення, модуль неперервностi, (ψ, β)-похiдна, ряд Фур'е.

On the classes $L^{\psi}_{\beta,2}$ exact estimates have been obtained for the values of the best polynomial approximations of (ψ, β)-differentiable functions, expressed by the averages modulus of continuity $\widehat{\omega}(f^{\psi}_{\beta}, t)$ with a weight $\xi(t)$. This modulus was introduced by K.V.Runovski and H.-J.Schmeisser.

Key words: best polynomial approximation, modulus of continuity, (ψ, β)-derivative, Fourier series.

Символом $L_2 := L_2([0, 2\pi])$ обозначим пространство, состоящее из 2π-периодических измеримых по Лебегу функций f с конечной нормой $\|f\| = \{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\}^{1/2}$. Вопросы, связанные с вычислением точных констант в неравенствах Джексона для классических модулей непрерывности, а также в неравенствах типа Джексона для иных характеристик гладкости функций в пространстве L_2 в разное время рассматривались Н.И.Черных, Л.В.Тайковым, А.А.Лигуном, В.В.Жуком, А.Г.Бабенко, В.В.Шалаевым, М.Г.Есмаганбетовым, Е.Е.Бердышевой, В.И.Ивановым и другими (см., например, [1] – [13]).

В статьях С.Н.Васильева [14], а также А.Н.Козко и А.В.Рождественского [15] были исследованы обобщения модулей непрерывности, которые можно рассматривать как своеобразное развитие идей, изложенных Х.Шапиро и Дж.Боманом в работах [16] – [17]. Дальнейшие исследования в указанном направлении связаны с работами А.Г.Бабенко, С.Н.Васильева и автора (см., например, [18] – [22]).

Так, в [20] – [22] была предпринята попытка обобщить с единых позиций большинство из уже накопленных к настоящему времени результатов, связанных с решением ряда экстремальных задач теории приближений в пространстве L_2. С этой целью было рассмотрено не только обобщение понятия производной 2π-периодической функции, но и определенное обобщение характеристики гладкости. Помимо указанного процесса обобщения целью данных работ являлось и то, чтобы при использовании каких-либо новых модификаций характеристики гладкости функции, которые укладывались бы в предложенные в [20] – [22] схемы, можно было бы сразу получить точные значения оценок погрешности аппроксимации на рассматриваемых классах функций путем конкретизации уже полученных общих результатов.

Наглядным примером для иллюстрации сказанного может служить предложенный К.В.Руновским и Х.Ю.Шмейссером модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса, который в L_2 имеет следующий вид [23]:

$$\widehat{\omega}(f,t) := \sup\left\{\left\|\frac{4}{\pi^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{f(x+(2j+1)h)}{(2j+1)^2} - f(x)\right\| : 0 < h \leqslant t\right\},\ t > 0. \tag{1}$$

Насколько нам известно, для характеристики гладкости (1) до сих пор не были известны точные результаты, связанные с решением экстремальных задач указанного выше вида в пространстве L_2. Чтобы восполнить имеющийся пробел, применим основные результаты [20] – [22] к модулю непрерывности (1). Для этого приведем необходимые понятия и определения.

Пусть f — суммируемая 2π-периодическая функция и $S(f)$ — её ряд Фурье, т.е.

$$S(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx\right), \tag{2}$$

где $a_0(f)$, $a_j(f)$, $b_j(f)$, $j \in \mathbb{N}$, есть коэффициенты Фурье функции f. Пусть $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ — сужение на множество $\mathbb{N}$ произвольной вещественной функции ψ, определенной на множестве $[1,\infty)$ и такой, что $\psi(j) \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$; $\beta \in \mathbb{R}$ есть произвольное фиксированное число. Если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(j)}\left(a_j(f)\cos(jx+\beta\pi/2) + b_j(f)\sin(jx+\beta\pi/2)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π-периодической функции, то, следуя А.И.Степанцу [24], эту функцию будем называть (ψ,β)–производной функции f и обозначать символом f_β^ψ. Через L_β^ψ обозначим множество всех 2π-периодических суммируемых функций f, имеющих (ψ,β)-производные. При этом коэффициенты Фурье функций f и f^{ψ}_{β} связаны соотношениями

$$\begin{cases} a_j(f) = \psi(j)\left(a_j(f^{\psi}_{\beta})\cos\dfrac{\beta\pi}{2} - b_j(f^{\psi}_{\beta})\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right), \\ b_j(f) = \psi(j)\left(a_j(f^{\psi}_{\beta})\sin\dfrac{\beta\pi}{2} + b_j(f^{\psi}_{\beta})\cos\dfrac{\beta\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Отметим, что в случае, когда $\psi(x) := x^{-r}$, где $r > 0$, т.е. $\psi(j) := j^{-r}$, а $\beta \in \mathbb{R}$, получаем (r, β)-производную $f^{(r)}_{\beta}$ в смысле Вейля – Надя. Если же при этом $\beta = r$, где $r \in \mathbb{N}$, то указанная производная является обычной производной r-го порядка функции f.

Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ и при этом $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество суммируемых 2π-периодических функций, то будем говорить, что f принадлежит к классу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. В дальнейшем под $\mathfrak{N}$ будем понимать пространство L_2 и вместо $L^{\psi}_{\beta}L_2$ будем записывать $L^{\psi}_{\beta,2}$.

Согласно [24] символом $\mathfrak{M}$ обозначим класс непрерывных на множестве $[1, \infty)$ положительных выпуклых вниз функций, стремящихся к 0 при $x \to \infty$, т.е. $\mathfrak{M} := \{\psi \in C([1,\infty)) : \psi(x) > 0 \ \forall x \in [1,\infty),\ \psi(x_1) - 2\psi((x_1 + x_2)/2) + \psi(x_2) \geqslant 0 \ \forall x_1, x_2 \in [1,\infty),\ \lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0\}$. Всюду далее полагаем, что последовательности $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, участвующие в определении (ψ, β)-производных, являются сужениями на множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ значений функций ψ из $\mathfrak{M}$. При этом $L^{\psi}_{\beta,2} \subset L_2$ [20].

Поскольку класс $\mathfrak{M}$ достаточно неоднороден по скорости стремления к нулю его элементов, когда $x \to \infty$, то А.И.Степанец предложил способ разбиения $\mathfrak{M}$ на подмножества, основанный на использовании пары функций $\eta(x) = \eta(\psi, x)$ и $\mu(x) = \mu(\psi, x)$, где $\psi(\eta(x)) := \psi(x)/2$, $\mu(x) := x/(\eta(x) - x)$, $1 \leqslant x < \infty$. Вследствие строгой монотонности функции ψ функция η определяется однозначно на множестве $[1, \infty)$, т.е. $\eta(x) = \psi^{-1}(\psi(x)/2)$. При этом величина $\eta(x) - x$ есть длина отрезка $[x, \eta(x)]$, на котором значение функции ψ уменьшается в два раза. В связи с этим функция μ была названа модулем полураспада функции ψ. Исходя из сказанного в классе $\mathfrak{M}$ были выделены следующие подмножества: $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}^+_0$, $\mathfrak{M}^+_\infty$ и приведены примеры функций, принадлежащих им [24]. Так, функции $\psi_{1,r}(x) := x^{-r}$, $r \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$; $\psi_{2,\varepsilon}(x) := \ln^{-\varepsilon}(x+e)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$; $\psi_{3,\sigma,\lambda}(x) := \exp(-\sigma x^{\lambda})$, $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, где $\mathbb{R}_+ := \{x : 0 \leqslant x < \infty\}$, принадлежат соответственно подмножествам $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}^+_0$ и $\mathfrak{M}^+_\infty$.

Для определения, какому из перечисленных подмножеств принадлежит элемент $\psi \in \mathfrak{M}$, А.И.Степанец ввел функцию

$$a(x) = a(\psi, x) := \frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|}; \quad \psi'(x) := \psi'(x + 0), \tag{3}$$

исходя из поведения которой на множестве $1 \leqslant x < \infty$ делается соответствующий вывод о принадлежности ψ. Используя формулу (3), для функций $\psi_{1,r}$; $\psi_{2,\varepsilon}$; $\psi_{3,\sigma,\lambda}$ имеем соответственно [24]:

$$a(\psi_{1,r}; x) = 1/r;\ a(\psi_{2,\varepsilon}; x) = \varepsilon^{-1}(x + e)\ln(x + e);\ a(\psi_{3,\sigma,\lambda}; x) = 1/(\sigma\lambda x^{\lambda}).$$

Обозначим через G класс четных непрерывных на всей вещественной оси неотрицательных ограниченных функций γ, которые почти всюду отличны от нуля и такие, что $\gamma(0) = 0$. Исходя из [14] – [17] в [20] была рассмотрена следующая характеристика гладкости функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье (2):

$$\omega_\gamma(f,t) := \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2(f)\gamma(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \leqslant t\right\}, \tag{4}$$

где $t > 0$, $\rho_j^2(f) := a_j^2(f) + b_j^2(f)$, $\gamma \in G$. Отметим, что в случае $\gamma = \gamma_{1,k}(x) := 2^k(1-\cos x)^k$, $k \in \mathbb{N}$, из (4) получаем обычный модуль непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$, а при $\gamma = \gamma_{2,k}(x) := (1 - \operatorname{sinc} x)^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, где $\operatorname{sinc} x := \{\sin(x)/x,\ \text{если}\ x \neq 0;\ 1,\ \text{если}\ x = 0\}$ для $f \in L_2$ получаем характеристику гладкости, определенную при помощи функции В.А.Стеклова (см., например, [25] – [26]). Несколько иных примеров характеристик гладкости функции $f \in L_2$, которые можно получить из (4) при определенных конкретизациях функции $\gamma \in G$, приведены в работе [21].

Поскольку функция γ, участвующая в определении характеристики гладкости (4), является четной, то достаточно рассмотреть ее поведение на множестве $\mathbb{R}_+$.

Полагаем

$$\gamma(t_*) = \sup\{\gamma(x) : x \in \mathbb{R}_+\},\ t_* \in (0,\infty). \tag{5}$$

Очевидно, что величина t_* зависит от функции γ. Если верхняя грань в формуле (5) достигается в конечном или бесконечном множестве точек, то в качестве t_* берем точку, имеющую наименьшую абсциссу.

Далее полагаем, что функция $\gamma \in G$ удовлетворяет *свойству A*, если на отрезке $[0, t_*]$ она монотонно возрастает. Так, например, данному свойству удовлетворяет функция $\gamma = \gamma_{1,k}$, для которой $t_* = \pi$, и функция $\gamma = \gamma_{2,k}$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$ [26].

Символом $E_{n-1}(f)$ обозначим величину наилучшего приближения функции $f \in L_2$ подпространством $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$, состоящим из тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$, т.е.

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{N}^T_{2n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье $S(f)$ функции f.

Для характеристики гладкости (1) получим функцию $\gamma \in \mathfrak{M}$ для того, чтобы (1) можно было представить в виде (4). Для этого сопоставим функции $f \in L_2$ разностный оператор $\Delta_h^\mu : L_2 \to L_2$ вида

$$\Delta_h^\mu(f,x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} z_j f(x + jh), \tag{6}$$

где $\mu := \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначает набор комплексных чисел z_j, удовлетворяющих условиям

$$0 < \sum_{j=-\infty}^{\infty} |z_j| < \infty, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} z_j = 0$$

(см., например, [14], [22]). Также сопоставим функции $f \in L_2$ ее разложение в ряд Фурье в комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) e^{ijx}.$$

Тогда для (6) имеем

$$\Delta_h^{\mu}(f,x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) w_{\mu}(jh) e^{ijx},$$

где

$$w_{\mu}(x) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e^{imx}. \tag{7}$$

Полагая

$$\gamma_{\mu}(x) := \frac{1}{2}(|w_{\mu}(x)|^2 + |w_{\mu}(-x)|^2) \tag{8}$$

и учитывая, что

$$|c_j(f)|^2 = |c_{-j}(f)|^2 = \frac{1}{4}\rho_j^2(f), \ \ j \in \mathbb{N},$$

имеем

$$\|\Delta_h^{\mu}(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)\gamma_{\mu}(jh).$$

Пусть

$$\widehat{z}_j := \{4/(\pi j)^2, \text{ если } j = 2\nu+1, \nu \in \mathbb{Z};\ 0, \text{ если } j = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\};$$

$$-1, \text{ если } j = 0\},\ j \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

и $\widehat{\mu} := \{\widehat{z}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Используя (6) и (9), для $f \in L_2$ почти всюду на $\mathbb{R}$ получаем

$$\Delta_h^{\widehat{\mu}}(f,h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{z}_j f(x+jh) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{f(x+(2\nu+1)h)}{(2\nu+1)^2} - f(x).$$

При этом, согласно (7) и (9), запишем

$$w_{\widehat{\mu}}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{z}_j e^{ijx} = -1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2\nu+1)x}}{(2\nu+1)^2} = -1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2}. \tag{10}$$

Учитывая, что
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2}=-\frac{\pi^2}{4}\mathfrak{E}_1\left(\frac{x}{\pi}\right),\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$
где $\mathfrak{E}_1(x):=x-1/2$ есть многочлен Эйлера (см., например, [27, с. 732, 777]), из (10) получаем
$$w_{\widehat{\mu}}(x)=-2x/\pi,\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$
Поскольку $w_{\widehat{\mu}}$ является четной 2π-периодической функцией, то очевидно, что
$$w_{\widehat{\mu}}(x)=-2|x|/\pi,\ \ -\pi\leqslant x\leqslant\pi. \tag{11}$$
Из (8) следует, что функция $\gamma_{\widehat{\mu}}\in\mathfrak{M}$, полученная при помощи (11), на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет следующий вид:
$$\gamma_{\widehat{\mu}}(x)=4x^2/\pi^2$$
и для нее величина $t_*=\pi$. При этом функция $\gamma_{\widehat{\mu}}$ также удовлетворяет *свойству A* и $\gamma_{\widehat{\mu}}(x)=\gamma_{\widehat{\mu}}(x+2k\pi)$, где $k\in\mathbb{Z}$ и $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Таким образом, характеристика гладкости (1) может быть представлена в виде
$$\widehat{\omega}(f,t)=\sup\{\|\Delta_h^{\widehat{\mu}}(f)\|:0<h\leqslant t\}=\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2(f)\gamma_{\widehat{\mu}}(jh)\right)^{1/2}:0<h\leqslant t\right\}.$$

Далее обозначим
$$\alpha_{j,\gamma_{\widehat{\mu}},\psi,p}(\xi,\tau):=\frac{1}{\psi(j)}\left\{\int\limits_0^{\tau}\gamma_{\widehat{\mu}}^{p/2}(jt)\xi(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{12}$$
Используя информацию о функции $\gamma_{\widehat{\mu}}$, характеризующей модуль непрерывности $\widehat{\omega}$, а также исходя из теоремы 2 и вытекающих из нее следствий, приведенных в работе автора [20], получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция ψ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $0<p\leqslant 2$, $\tau\in(0,\pi/n]$, ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место двойное неравенство*
$$\frac{1}{\alpha_{n,\gamma_{\widehat{\mu}},\psi,p}(\xi,\tau)}\leqslant\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\{\int_0^{\tau}\widehat{\omega}^p(f_\beta^{\psi},t)\xi(t)dt\}^{1/p}}\leqslant\frac{1}{\inf\limits_{n\leqslant j<\infty}\alpha_{j,\gamma_{\widehat{\mu}},\psi,p}(\xi,\tau)}.$$

С нашей точки зрения определенный интерес представляет вопрос о том, при каких условиях будет иметь место равенство
$$\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\{\int_0^{\tau}\widehat{\omega}^p(f_\beta^{\psi},t)\xi(t)dt\}^{1/p}}=\frac{1}{\alpha_{n,\gamma_{\widehat{\mu}},\psi,p}(\xi,\tau)}. \tag{13}$$

Следствие 1. *Пусть функция ψ принадлежащая классу $\mathfrak{M}$, дифференцируема на множестве $[1,\infty)$ $(\psi'(1) = \psi'(1+0))$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \tau \leqslant \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — неотрицательная и дифференцируемая почти всюду на интервале $(0,\tau)$ функция, которая не эквивалентна нулю,*

$$\sup\{a(\psi,x) : 1 \leqslant x < \infty\} \leqslant 2,$$

где функция $a(\psi)$ определена формулой (3). *Если при некотором $\widetilde{p}$, удовлетворяющем двойному неравенству*

$$\sup\{a(\psi,x) : 1 \leqslant x < \infty\} \leqslant \widetilde{p} \leqslant 2,$$

а также для почти всех $t \in [0,\tau]$ и любых $x \in [1,\infty)$ выполнено соотношение

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)} - 1\right)\xi(t) - t\ \xi'(t) \geqslant 0, \tag{14}$$

то для данного $\widetilde{p}$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{nE_{n-1}(f)}{\psi(n)\{\int_0^\tau \widehat{\omega}^{\widetilde{p}}(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{\pi}{2\{\int_0^\tau t^{\widetilde{p}}\xi(t)dt\}^{1/\widetilde{p}}}\ . \tag{15}$$

Если, например, $\xi = \xi_1(t) := t^m$, где $m \in [0,\infty)$ — константа, то для указанных ранее примеров функции ψ получаем, исходя из (14), следующие промежутки изменения величины $\widetilde{p}$ [20]:

для $\psi_{1,r}$ при $r \in [(1+m)/2,\infty)$ имеем $\widetilde{p} \in [(1+m)/r, 2]$;

для $\psi_{3,\sigma,\lambda}$ при $\sigma,\lambda \in (0,\infty)$ и $\sigma\lambda \geqslant (1+m)/2$ имеем $\widetilde{p} \in [(1+m)/(\sigma\lambda), 2]$.

Полагая в формуле (15) $\psi := \psi_{1,r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N}$, $\xi := \xi_1$, запишем следующий результат:

$$\sup_{\substack{f\in L^{r}_{2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^{r+1}E_{n-1}(f)}{\{\int_0^\tau \widehat{\omega}^{\widetilde{p}}(f^{(r)},t)t^m dt\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{\pi(\widetilde{p}+m+1)^{1/\widetilde{p}}}{\tau^{1+(m+1)/\widetilde{p}}}\ , \tag{16}$$

где $0 < \tau \leqslant \pi/n$. В случае $\xi := \xi_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$ при указанных выше ограничениях на σ,λ и $\widetilde{p}$ из (15) получаем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n\exp(\sigma n^{\lambda})E_{n-1}(f)}{\{\int_0^\tau \widehat{\omega}^{\widetilde{p}}(f^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}_{\beta},t)t^m dt\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{\pi(\widetilde{p}+m+1)^{1/\widetilde{p}}}{\tau^{1+(m+1)/\widetilde{p}}}\ , \tag{17}$$

Пусть теперь $\xi := \xi_2(t) = \sin^q(bt/\tau)$, где $0 < b \leqslant \pi$, $0 < t \leqslant \tau$, $0 < \tau \leqslant \pi/n$, $0 \leqslant q < \infty$. В данном случае условие (14) для функции $\psi_{1,r}$ при $1/2 \leqslant r < \infty$ и $0 \leqslant q \leqslant r\widetilde{p} - 1$ приобретает вид

$$1/r \leqslant \widetilde{p} \leqslant 2,$$

а для функции $\psi_{3,\sigma,\lambda}$ при $\sigma, \lambda \in (0,\infty)$, $1/2 \leqslant \sigma\lambda$ и $0 \leqslant q \leqslant \widetilde{p}\sigma\lambda - 1$ оно приобретает следующую форму

$$1/(\sigma\lambda) \leqslant \widetilde{p} \leqslant 2.$$

Если $\xi := \xi_2$ и $\psi := \psi_{1,r}$, когда $r = \beta \in \mathbb{N}$ и $0 < \tau \leqslant \pi/n$, то при выполнении указанных ограничений на поведение r, q и $\widetilde{p}$ из (12) – (13) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^{r+1} E_{n-1}(f)}{\{\int_0^\tau \widehat{\omega}^{\widetilde{p}}(f^{(r)}, t) \sin^q(bt/\tau) dt\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{\pi}{2\{\int_0^\tau t^{\widetilde{p}} \sin^q(bt/\tau) dt\}^{1/\widetilde{p}}} \ . \tag{18}$$

В случае же $\xi := \xi_2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$ при выполнении приведенных выше ограничений на $\sigma, \lambda, \widetilde{p}, q$ из (12) – (13) получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}} \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n \exp(\sigma n^\lambda) E_{n-1}(f)}{\{\int_0^\tau \widehat{\omega}^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}, t) \sin^q(bt/\tau) dt\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{\pi}{2\{\int_0^\tau t^{\widetilde{p}} \sin^q(bt/\tau) d\tau\}^{1/\widetilde{p}}} \ . \tag{19}$$

Полагая, например, $r = \beta \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\widetilde{p} = 1$, $q = 1$, из (18) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^{r+1} E_{n-1}(f)}{\int_0^\tau \widehat{\omega}(f^{(r)}, t) \sin(bt/\tau) dt} = \frac{\pi b}{2\tau^2(\operatorname{sinc} b - \cos b)} \ . \tag{20}$$

В частности, при $b := \pi$ из (20) следует равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^{r+1} E_{n-1}(f)}{\int_0^\pi \widehat{\omega}(f^{(r)}, \tau t/\pi) \sin t dt} = \frac{\pi}{2\tau} \ . \tag{21}$$

Следствие 2. *Пусть функция ψ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$, ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{\beta,2}^\psi \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\{\int_0^h \widehat{\omega}^p(f_\beta^\psi, t/n) \xi(t) dt\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2\{\int_0^h t^p \xi(t) dt\}^{1/p}} \ , \tag{22}$$

если справедливо соотношение

$$\inf_{1 \leqslant x < \infty} \frac{1}{\psi^p(nx)} \int\limits_0^h \gamma_{\widehat{\mu}}^{p/2}(xt) \xi(t) dt = \left(\frac{2}{\pi\psi(n)}\right)^p \int\limits_0^h t^p \xi(t) dt \ . \tag{23}$$

Пусть $\psi := \psi_{1,r}$, где $r \in (0,\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, т.е. $f_\beta^{\psi_{1,r}} = f_\beta^{(r)}$ и $\xi(t) := t^{rp-1}\widetilde{\xi}(t)$, где $0 < p \leqslant 2$, $\widetilde{\xi}$ — невозрастающая суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Из [20, с. 743], в частности, следует, что в указанном случае имеет место равенство (23), а значит и соотношение (22), т.е.

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\{\int_0^h \widehat{\omega}^p(f^{(r)}_\beta, t/n)t^{rp-1}\widetilde{\xi}(t)dt\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2\{\int_0^h t^{p(1+r)-1}\widetilde{\xi}(t)dt\}^{1/p}}\ . \qquad (24)$$

Полагая, например, в (24) $\widetilde{\xi}(t) := (h-t)^\eta$, где $\eta > 0$, имеем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\{\int_0^h \widehat{\omega}^p(f^{(r)}_\beta, t/n)t^{rp-1}(h-t)^\eta dt\}^{1/p}} = \frac{\pi}{2h^{r+1+\eta/p}\ B^{1/p}(p(r+1);\eta+1)}\ . \qquad (25)$$

Здесь

$$B(a;b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ \ a,b>0,$$

есть интеграл Эйлера первого рода.

Следует отметить, что для характеристики гладкости (1) даже в случае пространства L_2 ранее не были известны какие-либо точные результаты вида (13) или (22) либо некоторые их частные случаи вида (16) – (21) или (24) – (25) соответственно.

Для функции $f\in L_2$ введем следующий нелинейный функционал:

$$\Omega_p(f,\xi;\tau) := \left\{\frac{\int_0^\tau \widehat{\omega}^p(f,t)\xi(t)dt}{\int_0^\tau \xi(t)dt}\right\}^{1/p},\ \ \tau>0\ , \qquad (26)$$

где $0 < p \leqslant 2$; ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Используя (1), из (26) имеем

$$\Omega_p(f,\xi;\tau) \leqslant \widehat{\omega}(f,\tau),\ \tau>0\ . \qquad (27)$$

В силу (27) величину (26) можно также рассматривать как своеобразную характеристику гладкости функции $f\in L_2$ и решать экстремальные задачи теории аппроксимации в пространстве L_2 с использованием вместо (1) величины (26). В связи с этим в заключении статьи отметим, что приведенные выше точные результаты (15) – (25) несложно представить в виде, использующем (26) в качестве характеристики гладкости.

Библиографические ссылки

1. *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2(0,2\pi)$ [Текст] / Н.И.Черных // Мат. заметки. — Т. 2, №5. — С. 513—522.
2. *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывных функций [Текст] / Л.В.Тайков // Там же. — 1976. —Т. 20, №3. — С. 433—438.

3. *Жук В.В.* О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности [Текст] / В.В.Жук // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, №6. — С. 1283—1291.
4. *Лигун А.А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / А.А.Лигун // Мат. заметки. — 1978. — Т. 24, №6. — С. 785—792.
5. *Бабенко А.Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 [Текст] / А. Г.Бабенко // Там же. — 1986. — Т. 39, №5. — С. 651—664.
6. *Шалаев В.В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков [Текст] / В.В.Шалаев // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, №1. — С. 125—129.
7. *Есмаганбетов М.Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона [Текст] / М.Г.Есмаганбетов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, №6. — С. 816—820.
8. *Бердышева Е.Е.* Оптимальное множество модуля непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L_2 [Текст] / Е.Е.Бердышева // Там же. — 2004. — Т. 76, №5. — С. 666—674.
9. *Иванов В.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p [Текст] / В.И.Иванов, О.И.Смирнов. — Тула : Тульский гос. ун-т, 1995. — 192 с.
10. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций [Текст] / С.Б.Вакарчук, А. Н.Щитов // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №11. — С. 1458—1466.
11. *Vakarchuk S. B.* On best polynomial approximations in L_2 of certain classes of 2π-periodic functions and of exact values of their n-widths [Text] / S.B.Vakarchuk // Math. Notes. — 2001. — Vol. 70, №3. — P. 300—310.
12. *Vakarchuk S.B.* A sharp inequality of Jackson-Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes [Text] / S.B.Vakarchuk, V.I.Zabutnaya // Там же. — 2009. — Vol. 86, №3. — P. 306—313.
13. *Шабозов М.Ш.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, С.Б.Вакарчук // Analyses Mathematica. — 2012. — Т. 38, №2. — С. 147 — 159.
14. *Васильев С.Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами [Текст] / С.Н.Васильев // Докл. АН. — 2002. — Т. 385, №1. — С. 11–14.
15. *Козко А.И.* О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности [Текст] / А.И.Козко, А.В.Рождественский // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, №5. — С. 783—788.
16. *Boman J.* Comparison theorem for a generalized modulus of continuity [Text] / J.Boman, H.S.Shapiro // Ark. mat. — 1971. — Vol. 9, №1. — P. 91—116.
17. *Boman J.* Equivalence of generalized module of continuity [Text] / J.Boman, H.S.Shapiro // Там же. — 1980. — Vol. 18, №1. — P. 73—100.
18. *Бабенко А.Г.* О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2 приближений функций тригонометрическими полиномами [Текст] / А.Г.Бабенко // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2001. — Т. 7, №1. — С. 30—46.

19. *Васильев С.Н.* Поперечники некоторых классов функций в пространстве L_2 на периоде [Текст] / С. Н.Васильев // Там же. — 2013. — Т. 19, №4. — С. 42—47.
20. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. I. [Текст] / С.Б.Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, №6. — С. 723—745.
21. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. II. [Текст] / С.Б.Вакарчук // Там же. — 2016. — Т. 68, №8. — С. 1021—1036.
22. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. III. [Текст] / С.Б.Вакарчук // Там же. — 2016. — Т. 68, №10. — С. 1299—1319.
23. *Runovski K.* General moduli of smoothness and approximation by families of linear polynomial operators [Text] / K.Runovski, H.-J.Schmeisser // New Perspectives on Approximation and Sampling Theory. Applied and Numerical Harmonic Analysis. — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — P. 269—298.
24. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. В 2-х томах [Текст] / А.И.Степанец. — Киев : Ин-т матем. НАН України, 2002. — Ч. 1. — 426 с.
25. *Абилов В.А.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ [Текст] / В. А. Абилов, Ф.В. Абилова // Мат. заметки. — 2004. — Т. 76, №6. — С. 803—811.
26. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона - Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в L_2 [Текст] / С.Б.Вакарчук, В.И.Забутная // Там же. — 2012. — Т. 92, №4. — С. 497—514.
27. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды [Текст] / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, С.И.Маричев. — М. : Наука, 1981. — 798 с.

Надійшла до редколегії 18.04.2017