ISSN 2312 9557. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика.* 2017, вип. **22**

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, **М. Б. Вакарчук****
* Университет имени Альфреда Нобеля,
Днепр, 49000. *E-mail: sbvakarchuk@gmail.com*
** Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49050. *E-mail: mihailvakarchuk@gmail.com*

О средних ν-поперечниках некоторых классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

На классах функций $\mathcal{W}^r(\omega_m, \Phi)$, где $r, m \in \mathbb{N}$, Φ — мажоранта, ω_m — модуль непрерывности m-го порядка, получены оценки сверху и снизу колмогоровского, линейного и бернштейновского средних ν-поперечников. Также приведено условие, при выполнении которого из указанного результата следуют точные значения перечисленных экстремальных характеристик.

Ключевые слова: средняя размерность, средний ν-поперечник, мажоранта, модуль непрерывности.

На класах функцій $\mathcal{W}^r(\omega_m, \Phi)$, де $r, m \in \mathbb{N}$, Φ — мажоранта, ω_m — модуль неперервності m-го порядку, отримано оцінки зверху та знизу колмогорівського, лінійного та бернштейнівського середніх ν-поперечників. Також наведено умову, при виконанні якої з зазаначеного результату витікають точні значення перерахованих екстремальних характеристик.

Ключові слова: середня розмірність, середній ν-поперечник, мажоранта, модуль неперервності.

Estimates above and estimates below have been obtained for Kolmogorov, linear and Bernshtein average ν-widths on the classes of functions $\mathcal{W}^r(\omega_m, \Phi)$, where $r, m \in \mathbb{N}$, Φ — is a majorant, ω_m is the m^{th}-order modulus of continuity. Exact values of enumerated extremal characteristics, following from one condition were obtained too.

Key words: average dimension, average ν-width, majorant, modulus of continuity.

Пусть $L_2(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$, есть пространство всех измеримых на оси $\mathbb{R}$ функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма $\|f\| = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\} < \infty$. Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, $\sigma \in (0, \infty)$, обозначим множество функций, являющихся сужениями на $\mathbb{R}$ целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ через $\mathcal{A}_\sigma(f)$ обозначим величину его наилучшего приближения множеством $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. $\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\{\|f - g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$. При этом почти всюду на $\mathbb{R}$ существует конечная разность m-го порядка

$\Delta_h^m(f,x) := \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+jh)$, где $h \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, с помощью которой определяется модуль непрерывности m-го порядка для $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\omega_m(f,t) := \sup\{\|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leqslant t\}, \ \ t > 0. \tag{1}$$

Если множество функций $\mathfrak{M}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, то полагаем $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in \mathfrak{M}\}$.

Вопросы, связанные с вычислением точных констант в неравенствах типа Джексона и нахождением точных значений средних ν-поперечников в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривались, например, в работах [1] – [10]. Данная статья продолжает указанную тематику.

Напомним необходимые определения и понятия, следуя Г.Г.Магарил–Ильяеву [11] – [12]. Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ есть единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$; $Lin(L_2(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathfrak{L} \in Lin(L_2(\mathbb{R})) : dim\mathfrak{L} \leqslant n\}, n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$d(\mathfrak{M}, A, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in \mathfrak{M}\}$$

есть наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T, где $T > 0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезке $[-T,T]$, а через $Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in Lin(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ при любом $T > 0$.

Если $\mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $T, \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in Lin_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых $d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon$. Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \max\Big\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists \mathcal{M} \in Lin_n(L_2([-T,T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon\Big\}.$$

Данная величина не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В [11] было показано, что

$$\overline{dim}(\mathbb{B}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \sigma/\pi. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ является произвольным числом. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ понимают следующую экстремальную характеристику:

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}\} : f \in \mathfrak{M}\} :$$

$$: \mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\|f - V(f)\| : f \in \mathfrak{M}\} : (X, V)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, V) таким, что X есть нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, а $V : X \to L_2(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $Im\ V \subset Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ и выполнено неравенство $\overline{dim}(Im\ V, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu$. При этом $\mathfrak{M} \subset X$, а $Im\ V$ есть образ оператора V. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Для множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ под средним ν-поперечником по Бернштейну понимают следующую экстремальную характеристику:

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\sup\left\{\rho > 0 : \mathcal{L} \cap \rho B L_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\right\} :$$

$$: \mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\big\}.$$

Последнее условие, применяемое для $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых имеет место аналог теоремы В.М.Тихомирова о поперечнике шара. Этому свойству удовлетворяет, например, подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т.е. $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Между перечисленными экстремальными характеристиками множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ выполняются следующие неравенства:

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})). \tag{3}$$

Напомним, что точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций впервые были найдены в работах Г.Г.Магарил–Ильяева [11], [12].

Символом $L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(f^{(0)} \equiv f)$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ становится банаховым пространством, если норма в нем определяется как $\|f\| + \|f^{(r)}\|$.

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, \infty)$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$, которую далее будем называть мажорантой. Через $W^r(\omega_m, \Phi)$, где $r, m \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0, \infty)$ выполняется неравенство $\omega_m(f^{(r)}, t) \leqslant \Phi(t)$.

Теорема 1. *Пусть $\nu \in (0, \infty)$; $r, m \in \mathbb{N}$, функция Φ является мажорантой. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\frac{1}{2^m(\nu\pi)^r} \inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\} \leqslant \overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega_m,\Phi)) \leqslant \frac{1}{2^m(\nu\pi)^r}\ \limsup\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : \tau\to 0+\right\}, \tag{4}$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ *— любой из средних* ν*-поперечников, рассмотренных выше.*

Доказательство. Хорошо известно [1], что для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственная функция $\mathfrak{L}_\sigma(f) \in \mathbb{B}_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\mathfrak{L}_\sigma(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\mathfrak{F}(f,u)e^{ixu}du, \tag{5}$$

где $\mathfrak{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f в $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\mathcal{A}^2_\sigma(f) = \|f-\mathfrak{L}_\sigma(f)\|^2 = \int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|\mathfrak{F}(f,u)|^2du. \tag{6}$$

Напомним , что для $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \frac{1}{\sigma^r}\ \mathcal{A}_\sigma(f^{(r)}), \tag{7}$$

где $\sigma\in(0,\infty)$ — произвольное число.

Поскольку, в силу формулы (6), для $f\in L_2^r(\mathbb{R})$

$$\mathcal{A}^2_\sigma(f^{(r)}) = \int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|\mathfrak{F}(f^{(r)},u)|^2du, \tag{8}$$

то для произвольного числа $\varepsilon\in(0,\widetilde{\nu})$, где $\widetilde{\nu}=\min(\nu,1/\nu)$, существует такое число $K_\varepsilon = K(\varepsilon, f^{(r)})\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, $K_\varepsilon>\sigma$, что имеет место неравенство

$$\mathcal{A}^2_\sigma(f^{(r)}) \leqslant \int\limits_{|u|\geqslant\sigma}^{K_\varepsilon}|\mathfrak{F}(f^{(r)},u)|^2du+\varepsilon. \tag{9}$$

Известно [6], что для функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ ее модуль непрерывности m-го порядка можно представить в виде

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h|\leqslant t}\left\{2^m\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{F}(f,u)|^2(1-\cos(hu))^m du\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

С учетом формулы (10) для произвольного числа $h_\varepsilon\in(0,\pi/K_\varepsilon]$ получаем

$$\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}^{K_\varepsilon}|\mathfrak{F}(f^{(r)},u)|^2du \leqslant \frac{1}{(1-\cos(h_\varepsilon\sigma))^m}\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}^{K_\varepsilon}|\mathfrak{F}(f^{(r)},u)|^2(1-\cos(h_\varepsilon u))^m du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_m^2(f^{(r)}, h_\varepsilon)}{2^m(1-\cos(h_\varepsilon\sigma))^m}. \tag{11}$$

Используя соотношение (11), формулу (9) запишем следующим образом:

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r)}) \leqslant \frac{\omega_m^2(f^{(r)}, h_\varepsilon)}{2^m(1-\cos(h_\varepsilon\sigma))^m} + \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда для произвольной функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ из (7) и (12) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \leqslant \frac{1}{2^m\sigma^{2r}} \cdot \frac{\omega_m^2(f^{(r)}, h_\varepsilon)}{(1-\cos(h_\varepsilon\sigma))^m} + \frac{\varepsilon}{\sigma^{2r}}. \tag{13}$$

Из соотношений (8), (9) следует, что при $\varepsilon \to 0+$ имеем $K_\varepsilon \to \infty$, а значит $h_\varepsilon \to 0+$. Устремляя ε к нулю справа, из (13) для произвольного элемента $f \in W^r(\omega_m, \Phi)$ запишем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \frac{1}{2^{m/2}\sigma^r} \limsup \left\{ \frac{\omega_m(f^{(r)}, \tau)}{(1-\cos(\sigma\tau))^{m/2}} : \tau \to 0+ \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^m\sigma^r} \limsup \left\{ \frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\sigma\tau/2)} : \tau \to 0+ \right\}. \tag{14}$$

Пусть $\sigma := \nu\pi$. Тогда с учетом соотношений (3) и (14) получаем оценки сверху

$$\overline{b}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{d}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \frac{1}{2^m(\nu\pi)^r} \ \limsup \left\{ \frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : \tau \to 0+ \right\}. \tag{15}$$

Перейдем к получению оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик классов $W^r(\omega_m, \Phi)$. Для этого полагаем $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ есть произвольное число. Тогда, согласно формуле (2), средняя размерность

$$\overline{dim}\, \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} = \nu(1+\varepsilon). \tag{16}$$

Рассмотрим множество целых функций

$$\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} : \|g\| \leqslant \rho\},$$

где

$$\rho := \frac{1}{2^{m/2}(\widehat{\sigma})^r} \ \inf \left\{ \frac{\Phi(\tau)}{(1-\cos(\widehat{\sigma}\tau))_*^{m/2}} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu \right\},$$

$$(1-\cos x)_* := \{1-\cos x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \ 2, \text{ если } x \geqslant \pi\}. \tag{17}$$

Для произвольной функции $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ имеем

$$\|g^{(r)}\| \leqslant (\widehat{\sigma})^r \|g\|.$$

С учетом данного неравенства для любого элемента $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ получаем

$$\omega_m(g^{(r)}, t) = \sup_{|h|\leqslant t} \left\{ 2^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(g^{(r)}, u)|^2 (1-\cos(hu))^m du \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m/2}(1-\cos(t\widehat{\sigma}))_*^{m/2} \left\{ \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\mathfrak{F}(g^{(r)}, u)|^2 du \right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}(1-\cos(t\widehat{\sigma}))_*^{m/2} \|g^{(r)}\| \leqslant 2^{m/2}(\widehat{\sigma})^r(1-\cos(t\widehat{\sigma}))_*^{m/2}\|g\| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\cos(t\widehat{\sigma}))_*^{m/2} \ \inf\left\{ \frac{\Phi(\tau)}{(1-\cos(\widehat{\sigma}\tau))_*^{m/2}} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu \right\}. \qquad (18)$$

Пусть $0 < t \leqslant \pi/\widehat{\sigma}$. Тогда, полагая в правой части соотношения (18) $\tau := t$ и учитывая (17), имеем

$$\omega_m(g^{(r)}, t) \leqslant \Phi(t). \qquad (19)$$

Пусть теперь $\pi/\widehat{\sigma} \leqslant t < \infty$. Поскольку, в силу (17), в данном случае $(1 - \cos(t\widehat{\sigma}))_*^{m/2} = 2^{m/2}$, то из (18) получаем

$$\omega_m(g^{(r)}, t) \leqslant 2^{m/2} \cdot \inf\left\{ \frac{\Phi(\tau)}{(1-\cos(\widehat{\sigma}\tau))_*^{m/2}} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu \right\}.$$

Полагая в данном неравенстве $\tau := \pi/\widehat{\sigma} = 1/(\nu(1+\varepsilon))$, запишем

$$\omega_m(g^{(r)}, t) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)} \right).$$

Учитывая, что мажоранта Φ является возрастающей функцией, из последнего неравенства получаем соотношение (19) для рассматриваемых значений t.

Следовательно, справедливо включение $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho) \subset W^r(\omega_m, \Phi)$, на основании которого получаем

$$\overline{b}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \overline{b}_\nu(\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \rho,$$

или

$$\overline{b}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \frac{1}{2^{m/2}(\nu\pi)^r} \ \inf\left\{ \frac{\Phi(\tau)}{F_{\nu,m}(\varepsilon,\tau)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu \right\}, \qquad (20)$$

где

$$F_{\nu,m}(\varepsilon,\tau) := (1+\varepsilon)^r \ (1-\cos(\nu\pi\tau(1+\varepsilon)))_*^{m/2}. \qquad (21)$$

Исходя из (17) и (21) очевидно, что $F_{\nu,m}(\varepsilon,\tau)$, как функция от $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$, при фиксированных значениях ν, m, τ является монотонно возрастающей и $\lim\{F_{\nu,m}(\varepsilon,\tau) : \varepsilon \to 0+\} = 2^{m/2}\sin^m(\nu\pi\tau/2)$. Тогда для произвольного сколь угодно малого числа $\delta \in (0, \Phi(1/\nu))$ существует такое значение $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\delta, \tau) \in (0, \widetilde{\nu})$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{1}{F_{\nu,m}(\widetilde{\varepsilon}, \tau)} \geqslant \frac{1}{2^{m/2} \sin^m(\nu\pi\tau/2)} - \frac{\delta}{\Phi(1/\nu)}.$$

Умножая обе части данного соотношения на величину $\Phi(\tau)$, где $0 < \tau \leqslant 1/\nu$, получаем

$$\frac{\Phi(\tau)}{F_{\nu,m}(\widetilde{\varepsilon}, \tau)} \geqslant \frac{\Phi(\tau)}{2^{m/2} \sin^m(\nu\pi\tau/2)} - \delta.$$

Отсюда следует неравенство

$$\inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{F_{\nu,m}(\widetilde{\varepsilon}, \tau)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\} \geqslant \frac{1}{2^{m/2}} \inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\} - \delta. \quad (22)$$

Используя определение верхней грани числового множества, из (22) имеем

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{F_{\nu,m}(\varepsilon, \tau)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\} : 0 < \varepsilon < \widetilde{\nu}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\}. \quad (23)$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ от правой части неравенства (20), с учетом (23) получаем оценку снизу среднего ν-поперечника по Бернштейну класса $W^r(\omega_m, \Phi)$:

$$\overline{b}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \frac{1}{2^m (\nu\pi)^r} \inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\}. \quad (24)$$

Требуемое соотношение (4) следует из формул (15) и (24). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\} = \limsup\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : \tau \to 0+\right\}, \quad (25)$$

то имеют место следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega_m, \Phi)) =$$

$$= \frac{1}{2^m (\nu\pi)^r} \inf\left\{\frac{\Phi(\tau)}{\sin^m(\nu\pi\tau/2)} : 0 < \tau \leqslant 1/\nu\right\}, \quad (26)$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ *— любой из рассмотренных выше средних* ν*-поперечников. При этом пара* $(L_2^r(\mathbb{R}), \mathfrak{L}_{\nu\pi})$*, где оператор* $\mathfrak{L}_{\nu\pi}$ *определяется формулой* (5) *при* $\sigma := \nu\pi$*, будет экстремальной для среднего линейного* ν*-поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R}))$*, а подпространство* $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего* ν*-поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi); L_2(\mathbb{R}))$*.*

Проиллюстрируем на следующем примере применение полученных результатов. Пусть $\Phi_*(t) := t^m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда условие (25) будет выполнено, а соотношение (26) принимает вид

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega_m, \Phi_*); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega_m, \Phi_*)) = \frac{1}{(\nu\pi)^{r+m}}.$$

В заключение отметим, что приведенные в данном сообщении результаты можно рассматривать как соеобразное распространение работы Ю.И.Григоряна [13] на случай решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Библиографические ссылки

1. *Попов В.Ю.* О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа [Текст] / В.Ю.Попов // Изв. вузов. Матем. — 1972. — №6. — С. 65 – 73.
2. *Бабенко А.Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ [Текст] / А.Г.Бабенко // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 1998. — №5. — С. 3 – 7.
3. *Лигун А.А.* Точные константы в неравенстве типа Джексона для L_2 аппроксимации на прямой [Текст] / А.А.Лигун, В.Г.Доронин // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №1. — С. 92 – 98.
4. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов [Текст] / С.Б.Вакарчук, В.Г.Доронин // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, №8. — С. 1032 – 1043.
5. *Vakarchuk S.B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I. [Text] / S.B.Vakarchuk // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 188, N2. — P. 146 – 166.
6. *Вакарчук С.Б.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов [Текст] / С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов, М.Р.Лангаршоев // Изв. вузов. Матем. — 2014. — №7. — С. 30 – 48.
7. *Vakarchuk S.B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II. [Text] / S.B.Vakarchuk // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 190, N4. — P. 613 – 630.
8. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν-поперечники классов функций на прямой [Текст] / С.Б.Вакарчук // Мат. заметки. — 2014. — Т. 96, №6. — С. 827 – 848.
9. *Вакарчук С.Б.* Неравенство типа Джексона для специальных модулей непрерывности на всей вещественной оси и точные значения средних ν-поперечников классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [Текст] / С.Б.Вакарчук // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, №6. — С. 740 – 766.

10. *Vakarchuk S.B.* Meansquare approximation of function classes, given on the all real axis $\mathbb{R}$ by the entire functions of exponential type [Text] / S.B.Vakarchuk // Int. J. Adv. Math. — 2016. — Vol. 6. — P. 1 – 12.
11. *Магарил–Ильяев Г.Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой [Текст] / Г.Г.Магарил–Ильяев // ДАН СССР. — 1991. — Т. 318, №1. — С. 35 – 38.
12. *Магарил–Ильяев Г.Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой [Текст] / Г.Г.Магарил–Ильяев // Мат. сборник. — 1991. — Т. 182, №11. — С. 1635 – 1656.
13. *Григорян Ю.И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах [Текст] / Ю.И.Григорян // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30, №3. — С. 161 – 162.

Надійшла до редколегії 02.04.2017