ISSN 2312 9557. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2017, вип.* **22**

УДК 517.5

М. С. Гунько[**]**, А. А. Руденко**[***]

[*] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: MS-Gunko@rambler.ru*,
[***] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: AA-Rudenko@yandex.ru*

Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации на множествах, которые задаются неограниченными операторами

Знайденi оптимальна лiнiйна iнформацiя та оптимальний метод її використання для вiдновлення n - лiнiйних функцiоналiв на множинах, що задаються необмеженими операторами.

Ключовi слова: вiдновлення, n - лiнiйний функцiонал, лiнiйна iнформацiя, необмеженi оператори.

Найдены оптимальная линейная информация и оптимальный метод ее использования для восстановления n - линейных функционалов на множествах, которые задаются неограниченными операторами.

Ключевые слова: восстановление, n - линейный функционал, линейная информация, неограниченные операторы.

We found the optimal linear information and the optimal method of its use to renewal the n - linear functionals on sets which are defined by unbounded operators.

Key words: renewal, n - linear functional, linear information, unboundered operators.

Будем изучать задачу оптимизации приближённого вычисления n-линейных функционалов по линейной информации в следующей постановке. Пусть X – линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $M_1, ..., M_n \subset X$ центрально-симметричные множества. Предположим, что на прямом произведении линейных оболочек $\mathrm{span}(M_j)$ множеств M_j задан n-линейный функционал

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{C}$$

и для каждого $j = 1, ..., n$ на множестве $\mathrm{span}(M_j)$ задан набор $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_j})$ линейных непрерывных функционалов

$$T_{j,l} : \mathrm{span}(M_j) \to \mathbb{C}, j = 1, ..., n, l = 1, ..., m_j.$$

Векторы

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)),\ x_j \in M_j,\ j = 1, ..., n$$

будем называть линейной информацией об x_1, x_2,..., x_n типа $(m_1, ..., m_n)$ (или $(m_1, ..., m_n)$-информацией). Произвольную комплекснозначную функцию

$$F = F(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, x_{2,1}, ..., x_{2,m_2}, ..., x_{n,1}, ..., x_{n,m_n})$$

от $m_1+...+m_n$ переменных будем называть методом восстановления функционала $\Omega(\cdot, ..., \cdot)$ по $(m_1, ..., m_n)$-информации. Положим:

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) = \Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n)),$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in M_j, \\ j=1,...,n}} |R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F)|, \tag{1}$$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n) = \inf_F R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F), \tag{2}$$

$$R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n) = \inf_{T_1,...,T_n} R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n) \tag{3}$$

($\inf_F$ берется по всевозможным функциям от $m_1 + ... + m_n$ переменных, а $\inf_{T_1,...,T_n}$ по всевозможным наборам функционалов дающим $(m_1, ..., m_n)$– информацию об $x_1, ..., x_n$);

$$R_N(M_1, ..., M_n) = \inf_{m_1+...+m_n=N} R_{m_1,...,m_n}(M_1, ..., M_n). \tag{4}$$

Величину (1) назовем погрешностью метода F восстановления функционала Ω на множествах $M_1, ..., M_n$ по информации $T_1, ..., T_n$, величину (2) – оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, ..., M_n$ по заданной информации типа $(m_1, ..., m_n)$; величину (3) – оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, ..., M_n$ по $(m_1, ..., m_n)$ - информации, и, наконец, величину (4) – оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, ..., M_n$ по информации суммарного объема N.Если при заданных $T_1, ..., T_n$ существует F, реализующий $\inf_F$ в правой части (2), то будем называть F оптимальным методом использования данной информации. Если существует $T_1, ..., T_n$ и F, реализующие нижние грани в правой части (3), то будем их называть оптимальной $(m_1, ..., m_n)$ - информацией и оптимальным методом её использования для восстановления Ω на $M_1, ...M_n$. Числа $m_1^0, ..., m_n^0$, реализующие inf в (4), будем называть оптимальными объёмами информации об $x_1, ..., x_n$, а оптимальную $(m_1^0, ..., m_n^0)$– информацию – оптимальной информацией объема N об $x_1, ..., x_n$. Требуется для заданных Ω, $M_1, ..., M_n$ и N или $m_1, ..., m_n$ найти величины (4)(или (3)), а также оптимальную информацию объема N (или $(m_1, ..., m_n)$-информацию) и оптимальный метод ее использования.

Задача об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации была поставлена в [1]. Там же приведены первые результаты по ее решению. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [2]-[12].

Определим множества $M_j(T_j)$ так

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, j = 1, ..., n,$$

и пусть

$$M(T_j) := M_1 \times ... \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times ... \times M_n, j = 1, ..., n,$$

где значек $\times$ обозначает декартово произведение.

Оценку снизу для погрешности метода F восстановления функционала Ω по информации $T_1, ..., T_n$ дает следующая лемма.

Лемма 1. Для любых $T_1, ..., T_n$ и метода восстановления F

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \max \left\{ \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_1)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|, ..., \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \right\}.$$

Эта лемма доказана для билинейных функционалов в [1].

Доказательство. Докажем, что

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Действительно

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)| =$$

$$= \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} \max \{ |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)|,$$

$$|-\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)| \} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Аналогично доказывается, что для произвольного $j = 1, ..., n-1$

$$R(M_1, ..., M_n; T_1, .., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...,x_n) \in M(T_j)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Пусть H- сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел; $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве H; $\hat{x}_k = (x, e_k)$. С помощью последовательностей $g^s, s = 1, ..., n$, комплексных чисел $g^s = \{g_k^s\}_{k=1}^{\infty}$ определим классы элементов пространства H:

$$W_{p_s}^{g^s} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^s| \, |\hat{x}_k|^{p_s} \leq 1 \right\}, \ p_s \geq 1.$$

Будем рассматривать n-линейные функционалы следующего вида

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k^1=1}^{\infty} \sum_{k^2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k^n=1}^{\infty} f(e_{k^1}, e_{k^2}, ..., e_{k^n}) \, \hat{x}_{k^1} ... \hat{x}_{k^n} =$$

$$= \sum_{k^1=1}^{\infty}\sum_{k^2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k^n=1}^{\infty}\frac{f(e_{k^1},e_{k^2},...,e_{k^n})}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{k^s}|^{1/p_s}}\prod_{s=1}^{n}|g^s_{k^s}|^{1/p_s}\ \hat{x}_{k^1}...\hat{x}_{k^n} \tag{5}$$

Упорядочим числа $\frac{|f(e_{k^1},e_{k^2},...,e_{k^n})|}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{k^s}|^{1/p_s}}$ по убыванию (считаем, что базисы e_{k^s} и последовательности g^s_k таковы, что это возможно). Обозначим через $v_k \in \mathbb{N}^n$ их индексы, а через $q_k(s) \in \mathbb{N}$ s-ю координату v_k. Таким образом $\frac{|f(e_{q_k(1)},e_{q_k(2)},...,e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}}$ не возрастают при возрастании k. Пусть также $V_u := \bigcup\limits_{k=1}^{u} v_k$. Через $N(V_u,s)$ будем обозначать количество различных элементов в $q_k(s)$ при фиксированных u и s.

Теорема 1. *Пусть задан n-линейный функционал Ω вида (5), $u \in \mathbb{N}$, $Q = 1,2,...,n$, $N = N(V_u,Q)-1 \in \mathbb{N}$. Пусть также $p_j \geq 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j} = 1$, тогда*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}_{p_1},...,W^{g^n}_{p_n}) = \max_{(q_j(1),q_j(2),...,q_j(n))\notin V_u}\frac{|f(e_{q_j(1)},e_{q_j(2)},...,e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} =$$

$$= \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)},e_{q_{u+1}(2)},...,e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

При этом информация об элементах $x_j \in W^{g^j}_{p_j}$, $j = 1,...,n$ вида

$$\widetilde{T}_j(x_j) = ((x_j,e_{q_1(j)}),...,(x_j,e_{q_u(j)})) = (\hat{x}_{j,q_1(j)},...,\hat{x}_{j,q_u(j)})$$

и метод

$$\widetilde{F}(\hat{x}_{1,q_1(1)},...,\hat{x}_{1,q_u(1)},...,\hat{x}_{n,q_1(n)}...,\hat{x}_{n,q_u(n)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{u}|f(e_{q_k(1)},e_{q_k(2)},...,e_{q_k(n)})|\ \hat{x}_{q_k(1)}...\hat{x}_{q_k(n)}$$

ее использования будут оптимальными.

Напомним, что среди $q_k(j)$ могут быть совпадающие. Количество различных элементов будет $N(V_u,j)$.

Доказательство. Рассмотрим множество V_u. Его элементы порождают элементы вида $y^s = \sum\limits_{j=1}^{u} y_j e_{q_j(s)}, s = 1,...,n$, где y_j- произвольные пока числа. В силу определения N среди $e_{q_j(n)}$ будет $N+1$ различных. Выбираем числа y_j так, чтобы во-первых y_j были при различных $e_{q_j(n)}$ и поэтому их будет $N+1$. Во-вторых, чтобы

$T_n\left(\sum\limits_{j=1}^{u}\frac{y_j}{\left|g^n_{q_j(n)}\right|^{1/p_n}}e_{q_j(n)}\right)=0$. Функционалов N штук, поэтому можем выбрать y_j не все равные нулю. В-третьих, y_j нормируются условием $\sum|y_j|^{p_n}=1$. Выбранные таким образом y_j, будем обозначать через y_{u_j}, $j=1,...,N+1$. Заметим, что индексы согласованы так, что y_{u_j} есть коэффициенты для $e_{q_j(s)}$, $s=1,...,n$.

Для произвольной информации $T_1,...,T_n$ типа $(m_1,...,m_n)$ получим оценку снизу величины $R(W^{g^1}_{p_1},...,W^{g^n}_{p_n};T_1,...,T_n)$. Определим $z_1,...,z_n$ следующим образом

$$z_s=\sum_{j=1}^{N+1}\left|\frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^s_{q_j(s)}}\right|^{1/p_s}e_{q_j(s)},\ \ s=1,...,n-2,$$

$$z_{n-1}=\sum_{j=1}^{N+1}\left|\frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^{n-1}_{q_j(n-1)}}\right|^{1/p_{n-1}}e^{-i(arg(y_{u_j})+arg(f(e_{q_j(1)},...e_{q_j(n)})))}e_{q_j(n-1)},$$

$$z_n=\sum_{j=1}^{N+1}\left|\frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^n_{q_j(n)}}\right|^{1/p_n}e^{iarg(y_{u_j})}e_{q_j(n)}=\sum_{j=1}^{N+1}\frac{y_{u_j}}{\left|g^n_{q_j(n)}\right|^{1/p_n}}e_{q_j(n)}.$$

Покажем, что элементы $z_s, s=1,...,n$ принадлежат соответственно классам $W^{g^s}_{p_s}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}|g^s_{q_j(s)}|\ |\hat{z}_{j,s}|^{p_s}=\sum_{j=1}^{N+1}|g^s_{q_j(s)}|\ |\hat{z}_{j,s}|^{p_s}=\sum_{j=1}^{N+1}|g^s_{q_j(s)}|\ \left(\left|\frac{|y_{u_j}|^{p_n}}{g^s_{q_j(s)}}\right|^{1/p_s}\right)^{p_s}=1.$$

Ясно, что $T_n(z_n)=0$ и в силу леммы 1 получем неравенство

$$R(W^{g^1}_{p_1},...,W^{g^n}_{p_n};T_1,...,T_n;F)\geq\sup_{(x_1,...,x_n)\in M(T_n)}|\Omega(x_1,...,x_n)|\geq$$

$$\geq\sup_{\substack{x_j\in W^{g^j}_{p_j},\ j=\overline{1,n}\\ x_n\in W^{g^n}_{p_n}(T_n)}}|\Omega(x_1,...,x_n)|\geq|\Omega(z_1,...,z_n)|=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+1}|f(e_{q_j(1)},e_{q_j(2)},...,e_{q_j(n)})|\frac{\prod\limits_{s=1}^{n}|y_{u_j}|^{p_n(1/p_s)}}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+1}\frac{|f(e_{q_j(1)},e_{q_j(2)},...,e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n}|g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}}|y_{u_j}|^{p_n(1/p_1+...+1/p_n)}=$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} |y_{u_j}|^{p_n} \geq$$

$$\geq \left(\min_{(q_j(1),q_j(2),...,q_j(n))\in V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} \right) \left(\sum_{j=1}^{N+1} |y_{u_j}|^{p_n} \right) =$$

$$= \min_{(q_j(1),q_j(2),...,q_j(n))\in V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}} \geq$$

$$\geq \max_{(q_j(1),q_j(2),...,q_j(n))\notin V_u} \frac{|f(e_{q_j(1)}, e_{q_j(2)}, ..., e_{q_j(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_j(s)}|^{1/p_s}}.$$

Для произвольного $Q = 1, ..., n-1$ оценка снизу доказывается аналогично. Получим оценку сверху

$$R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; T_1, ..., T_n; F) \leq R(W^{g^1}_{p_1}, ..., W^{g^n}_{p_n}; \widetilde{T}_1, ..., \widetilde{T}_n; \tilde{F}) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)}, e_{q_k(2)}, ..., e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{q_k(1)} ... \hat{x}_{q_k(n)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{u} \frac{|f(e_{q_k(1)}, e_{q_k(2)}, ..., e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{q_k(1)} ... \hat{x}_{q_k(n)} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)}, e_{q_k(2)}, ..., e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{q_k(1)} ... \hat{x}_{q_k(n)} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_k(1)}, e_{q_k(2)}, ..., e_{q_k(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{q_k(s)} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,...,n}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \ \hat{x}_{q_k(s)} \right| \leq$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \; \hat{x}_{q_k(s)} \right|$$

В силу известного неравенства для суммы произведений степеней (см.[14], стр. 29)

$$\sum A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot ... \cdot L^{\lambda} \le \left(\sum A\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum B\right)^{\beta} \cdot ... \cdot \left(\sum L\right)^{\lambda},$$

где $\alpha + \beta + ... + \lambda = 1$ имеем

$$\sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \left| \sum_{k=u+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_{q_k(s)}|^{1/p_s} \; \hat{x}_{q_k(s)} \right| \le$$

$$\le \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,...,n}} \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}} \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=u+1}^{\infty} |g^s_{q_k(s)}| \, |\hat{x}_{q_k(s)}|^{p_s} \right)^{1/p_s} \le$$

$$\le \frac{|f(e_{q_{u+1}(1)}, e_{q_{u+1}(2)}, ..., e_{q_{u+1}(n)})|}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{q_{u+1}(s)}|^{1/p_s}}.$$

Авторы благодарят В.Ф.Бабенко за постановку задач, непосредственное участие в получении результатов и постоянную поддержку.

Список литературы

1. Бабенко В.Ф. О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных /В. Ф. Бабенко // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск, 1979, С. 3-5.

2. Бабенко В.Ф. О приближенном вычислении скалярных произведений /В. Ф. Бабенко // Укр. мат. журн., 1988, Т.40, №1, С.15-21.

3. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн., 1991, Т.43, №10, С.1305-1310.

4. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций из различных классов /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Теория функций и приближений.– Саратов, 1991, С.17-22.

5. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций на классах функций, задаваемых дифференциальными операторами. /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Приближение функций и суммирование рядов – Днепропетровск, 1992, С.8-13.

6. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов в линейных нормированных пространствах. /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн., 1997, Т.49, №6, С.828-831.

7. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации. /В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2012, вип. 17 – Днепропетровск, 2012, С.11-17.

8. Бабенко В.Ф. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации. /В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. 18 – Днепропетровск, 2013, С.16-25.

9. Бабенко В. Ф. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Укр. мат. журнал. –2014. –Т.66, №7 – С.884-890.

10. Гунько М. С. Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тези доповідей міжн. матем. конференції ”Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” , присвяченої 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, академіка А. М. Самойленка.–Україна, Севастополь. – 23-30 червня 2013 р. – С. 230.

11. Бабенко В. Ф. Задачи оптимального восстановления n-линейных функционалов по линейной информации / В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Тез. крымской междунар. матем. конф. "КММК-2013 КРОМШ".–Украина, Автономная республика Крым, Судак. – 22 сент.- 4 окт. 2013 р. – С. 83-84.

12. Гунько М. С. Оптимальное восстановление n-линейных функционалов по линейной информации / М. С. Гунько // Тез. IX междунар. научной конф. студентов и молодых ученых "Наука и образование - 2014".– Казахстан, Астана. – 11 апр. 2014 г. – С. 2098-2101.

13. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара /И.М. Соболь –М., 1969.

14. Hardy G.H. Inequalities /G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya –Cambridge, 1934.

Надійшла до редколегії 27.04.2014