ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2017, вип. **22**

УДК 517.5

В. А. Кофанов[**]

[**] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

Решение задачи Боянова-Найденова с ограничениями на норму $\|x\|_{p,\,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,\,b]} : a, b \in \mathbf{R}\,,\; b-a \le \delta\}$

Для заданых $r \in \mathbf{N}$; $p, \lambda > 0$ и произвольного промежутка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ решены экстремальные задачи

$$1)\ \int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup,\ \ q \ge p\,, \quad 2)\ \int_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt \to \sup, \quad q \ge 1,\ \ k \in \mathbf{N},\ \ k < r,$$

на множестве функций $x \in L^r_\infty$, таких что $\|x^{(r)}\|_\infty \le 1,\ \|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}\,,\ \delta \in (0,\ \pi/\lambda)$.

Ключевые слова: неравенства разных метрик, неравенства колмогоровского типа, задача Боянова-Найденова.

Для заданих $r \in \mathbf{N}$; $p, \lambda > 0$ і довільного проміжка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ розв'язано екстремальні задачі

$$1)\ \int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup,\ \ q \ge p\,, \quad 2)\ \int_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt \to \sup, \quad q \ge 1,\ \ k \in \mathbf{N},\ \ k < r,$$

на множині функцій $x \in L^r_\infty$, таких що $\|x^{(r)}\|_\infty \le 1,\ \|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}\,,\ \delta \in (0,\ \pi/\lambda)$.

Ключові слова: нерівності різних метрик, нерівності колмогоровського типу, задача Боянова-Найденова.

For given $r \in \mathbf{N}$; $p, \lambda > 0$ and fixed interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ we solve the extremal problems

$$1)\ \int_a^b |x(t)|^q dt \to \sup,\ \ q \ge p\,, \quad 2)\ \int_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt \to \sup, \quad q \ge 1,\ \ k \in \mathbf{N},\ \ k < r,$$

on an set of the functions $x \in L^r_\infty$ such that $\|x^{(r)}\|_\infty \le 1,\ \|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta}\,,\ \delta \in (0,\ \pi/\lambda)$.

Key words: Inequalities of various metrics, Kolmogorov-type inequalities, Bojanov-Naidenov problem.

1. Введение. Пусть $G = \mathbf{R}$, $G = [a,b]$ или $G = I_{2\pi}-$ отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, для которых величина $\|x\|_{L_p(G)}$ конечна, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|x\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{t \in G} |x(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

Для $r \in \mathbf{N}$ и $p, s \in (0, \infty]$ через $L^r_{p,s}$ обозначим пространство всех функций $x \in L_p(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_s(\mathbf{R})$. Будем писать $\|x\|_p$ вместо $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ и L^r_∞ вместо $L^r_{\infty,\infty}$.

Хорошо известно (см., например, [1, стр. 47]), что задача нахождения точной константы C в неравенстве типа Колмогорова-Надя

$$\|x^{(k)}\|_q \le C \, \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметры $q, p, s \ge 1$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $k < r$, удовлетворяют условию $\alpha \le (r-k)/r$, равносильна следующей экстремальной задаче:

$$\|x^{(k)}\|_q \to \sup \tag{1.2}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_s \le A_r, \quad \|x\|_p \le A_0, \tag{1.3}$$

где A_0, A_r – заданные положительные числа.

Несмотря на большое количество работ по этой тематике точная константа C в неравенстве (1.1) известна для всех $r \in \mathbf{N}$ и всех $k < r$ лишь в немногих случаях. Подробную библиографию можно найти в работах [1] – [3]. Поэтому представляет интерес модификация задачи (1.2) с ограничениями (1.3), рассмотренная Бояновым и Найденовым [4]. Для произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ими решена проблема

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad k = 1, ...r-1,$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.3) с $p = s = \infty$, где Φ – непрерывно дифференцируемая функция на $[0, \infty)$, положительная на $(0, \infty)$, такая что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$. Важнейший пример такой функции дается равенством $\Phi(t) = t^p$, $p \ge 1$.

Через W обозначим класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ, определенных на $[0, \infty)$, таких что $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ положим [5]

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : \; a, b \in \mathbf{R}, \; |x(t)| > 0, \; t \in (a, b) \right\}. \tag{1.4}$$

Отметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ и $L(x')_1 \le 2\|x\|_\infty$.

В работе [6] решена следующая модификация задачи Боянова и Найденова:

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.5}$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p \le A_0, \tag{1.6}$$

Как следствие получено решение задачи для производных

$$\int\limits_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, ..., r-1, \tag{1.7}$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.6).

В настоящей заметке решены задачи (1.5) и (1.7) с ограничениями на норму старшей производной $\|x^{(r)}\|_\infty$ и норму функции $\|x\|_{p,\delta}$ (вместо ограничений на ее локальную "норму" $L(x)_p$), где

$$\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}\,,\ b - a \le \delta\}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0\,(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ и для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}\,(t) := \lambda^{-r}\varphi_r\,(\lambda t)$.

Пусть $r \in \mathbf{N}$ и p, $\lambda > 0$. Введем следующий класс функций

$$F^r_p(\lambda) := \{x \in L^r_\infty : \ \ \|x\|_{p,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\delta} \cdot \|x^{(r)}\|_\infty, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda]\}. \tag{2.1}$$

Примеры функций $x \in F^r_p(\lambda)$ приведены в теоремах 2 и 4. В частности, произвольная функция $x \in L^r_\infty$ при любом $p > 0$ принадлежит классу $x \in F^r_p(\lambda)$ с некоторым $\lambda > 0$, а любая функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равная нулю на периоде, принадлежит классу $F^r_p(1)$ при $p \ge 1$.

Через $\tilde{F}^r_p(\lambda)$ обозначим класс функций $x \in F^r_p(\lambda)$, для которых при любых $\Phi \in W$ и $\delta \in (0, \pi/\lambda)$ каждая из точных верхних граней

$$\sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt : \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \beta - \alpha \le \delta\right\} \tag{2.2}$$

и

$$\sup\{\|x\|_{L_\infty[\alpha,\beta]} : \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \beta - \alpha \le \delta\}$$

достигается на некотором отрезке $[\alpha,\ \beta]$ (зависящем от Φ и δ). Примерами функций класса $\tilde{F}^r_p(\lambda)$ являются функции $x \in F^r_p(\lambda)$, обладающие одним из свойств:

1) $x-$ периодическая функция (произвольного периода),
2) $\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0$,
3) $x \in L_{p,\infty}$ при $p < \infty$,
4) $x-$ финитная функция.

Отметим, что $\tilde{F}^r_p(\lambda) \subset \tilde{F}^r_q(\lambda)$ при $q > p > 0$ (см. следствие 1).

Лемма 1. *Если функция x непрерывна на $\mathbf{R}$, а точная верхняя грань в определении (2.2) реализуется на отрезке $[a, b]$, то*

$$|x(a)| = |x(b)| \quad [7].$$

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; p, $\lambda > 0$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \cdot \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Предположим, что (2.3) не выполняется для некоторой функции $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$. Вследствие однородности неравенства (2.3) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{2.4}$$

Тогда существует такое $\omega \in (0, \lambda)$, для которого

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty. \tag{2.5}$$

Если $m-$ точка максимума сплайна $\varphi_{\omega,r}$, т. е.

$$\|\varphi_{\omega,r}\|_\infty = \varphi_{\omega,r}(m), \tag{2.6}$$

то в силу (2.5) и определения класса $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ существует такое $\tau \in \mathbf{R}$, что

$$\|x\|_\infty = |x(m+\tau)|. \tag{2.7}$$

Заметим, что в силу равенств (2.4) и (2.5) функция x удовлетворяет условиям теоремы сравнения Колмогорова [8]. Согласно этой теореме из соотношений (2.5) – (2.7) вытекает неравенство

$$|x(t+\tau)| \ge |\varphi_{\omega,r}(t)|, \quad t \in (m - \pi/(2\omega),\, m + \pi/(2\omega)).$$

Из него, принимая во внимание включение $\omega \in (0, \lambda)$, получаем

$$\|x\|_{p,\,\pi/\lambda} \ge \|\varphi_{\omega,r}\|_{L_p[m-\pi/(2\lambda),\, m+\pi/(2\lambda)]} = \|\varphi_{\omega,r}\|_{p,\,\pi/\lambda} > \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\pi/\lambda},$$

что ввиду (2.4) противоречит условию $x \in F_p^r(\lambda)$. Лемма 2 доказана.

Для суммируемой на отрезке $[a,b]$ функции x символом $r(x,t)$ обозначим перестановку функции $|x|$ (см., например, [9, §1.3]). При этом условимся, что $r(x,t) = 0$ для $t > b-a$.

Лемма 3. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; p, $\lambda > 0$; $\Phi \in W$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda)$ и отрезка $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$, для которого $b - a \le \pi/\lambda$, выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|A_r \cdot \varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.8}$$

где $A_r = \|x^{(r)}\|_\infty$, $m-$ точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а число Θ удовлетворяет условиям

$$\varphi_{\lambda,r}(m-\Theta) = \varphi_{\lambda,r}(m+\Theta), \quad 2\Theta = b-a.$$

В частности,

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi\left(|A_r \cdot \varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \tag{2.9}$$

где $c-$ нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r}$.

Доказательство. Зафиксируем функцию x и отрезок $[a,\, b]$, удовлетворяющие условиям леммы. Докажем неравенство (2.8). Не ограничивая общности можем считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{2.10}$$

Положим $\delta := b - a$. По определению класса $\tilde{F}^r_p(\lambda)$ точная верхняя грань (2.2) реализуется на некотором отрезке $[\alpha,\, \beta]$. Среди таких отрезков, очевидно, найдется такой, что $\beta - \alpha = \delta$. Неравенство (2.8) достаточно доказать для $[a,\, b] = [\alpha,\, \beta]$. Тогда в силу леммы 1

$$|x(a)| = |x(b)|. \tag{2.11}$$

Через $\overline{x}$ обозначим сужение функции x на отрезок $[a,\, b]$, а через $\overline{\varphi}_{\lambda,r}-$ сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[m-\Theta,\, m+\Theta]$. Докажем сначала неравенство

$$\int_0^\xi r^p(\overline{x},\, t)dt \le \int_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_{\lambda,r},\, t)dt, \quad \xi > 0. \tag{2.12}$$

Убедимся прежде всего в том, что разность $\delta(t) := r(\overline{x},\, t) - r(\overline{\varphi}_{\lambda,r},\, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Для этого заметим, во-первых, что

$$\delta(0) \le \|x\|_\infty - \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \le 0 \tag{2.13}$$

в силу леммы 2 и предположения (2.10). Далее положим

$$A := \min\{|\overline{x}(t)| : \, t \in [a,\, b]\}, \quad B := \max\{|\overline{x}(t)| : \, t \in [a,\, b]\}.$$

Если $B \le |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$, то разность $\delta(t)$ не меняет знак. Пусть $B > |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$. Тогда положим $C = \max\{A,\ |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|\}$. Ввиду (2.11) и (2.13) для любого $z \in (C,\, B)$ существуют точки

$$t_i \in [a,\, b], \quad i = 1,...,m, \quad m \ge 2, \quad y_j \in [m-\Theta,\, m+\Theta], \quad j = 1,2,$$

такие что

$$z = |\overline{x}(t_i)| = |\overline{\varphi}_{\lambda,r}(y_j)|. \tag{2.14}$$

При этом $|x'(t_i)| \ne 0$, $i = 1,...,m$, для почти всех $z \in (C,\, B)$. В силу (2.10) и (2.13) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [8]. По этой теореме для точек t_i и y_j, удовлетворяющих условию (2.14) выполнены неравенства

$$|\overline{x}\,'(t_i)| \le |\overline{\varphi}\,'_{\lambda,r}(y_j)|.$$

Поэтому, если точки Θ_1, $\Theta_2 > 0$ выбраны так, что

$$z = r(\overline{x},\, \Theta_1) = r(\overline{\varphi},\, \Theta_2),$$

то по теореме о производной перестановки (см., например, [9, предложение 1.3.2])

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{x}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность $\delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое верно и для разности $\delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t)$. Рассмотрим интеграл $I_p(\xi) := \int\limits_0^{\xi} \delta_p(t)dt$. Ясно, что $I_p(0) = 0$ и в силу определения класса $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ и предположения (2.10) имеем

$$I_p(\xi) = \|x\|_{p,\,\delta} - \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta} \le 0, \quad \xi \ge \delta.$$

Кроме того, производная $I_p'(t) = \delta_p(t)$ меняет знак не более одного раза (с минуса на плюс). Таким образом, $I_p(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$ и неравенство (2.12) доказано. Из него в силу теоремы Харди - Литлвуда - Полиа (см., например, [9, предложение 1.3.11]) следует, что

$$\int_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt = \int_0^{b-a} \Phi\left(r^p(\overline{x}, t)\right) dt \le \int_0^{b-a} \Phi\left(r^p(\overline{\varphi},\, t)\right) dt = \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt.$$

Ввиду (2.10) неравенство (2.8) доказано. Из него, очевидно, следует (2.9). Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; p, $\lambda > 0$. Тогда для любого $q > p$ имеет место включение*

$$\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset \tilde{F}_q^r(\lambda).$$

Доказательство. Включение $\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset F_q^r(\lambda)$ следует из определения (2.1) и неравенства (2.8), если положить в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, $q > p$. Докажем требуемое включение $\tilde{F}_p^r(\lambda) \subset \tilde{F}_q^r(\lambda)$. Учитывая определение (2.2) класса $\tilde{F}_q^r(\lambda)$ зафиксируем произвольную функцию $\Phi \in W$ и покажем, что для любого $\delta \in (0, \pi/\lambda)$ точная верхняя грань

$$S_q(\Phi) := \sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^q\right) dt : \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \beta - \alpha \le \delta\right\}$$

достигается на некотором отрезке. Положим $\Phi_1(t) = t^{q/p}$. Тогда $S_q(\Phi) = S_p(\Phi(\Phi_1))$. Ясно, что суперпозиция функций класса W является функцией этого класса. Следовательно, указанная точная верхняя грань $S_q(\Phi)$ достигается, если $x \in$

$\tilde{F}^r_p(\lambda)$, так как в этом случае достигается верхняя грань $S_p(\Phi(\Phi_1))$. Следствие 1 доказано.

3. Основные результаты. Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p,\ \lambda > 0$; $[a,\ b] \subset \mathbf{R}$. Следуя Боянову и Найденову [4], представим длину отрезка $[a,\ b]$ в виде

$$b - a = n \cdot \frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}, \quad 2\Theta \in [0,\ \pi/\lambda). \tag{3.1}$$

Пусть далее $\tau \in \mathbf{R}$ таково, что

$$\varphi_{\lambda,r}(m + \Theta + \tau) = \varphi_{\lambda,r}(m - \Theta + \tau) = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty, \tag{3.2}$$

где $m-$ точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. Ясно, что $\varphi_{\lambda,\,r}(\cdot + \tau) \in \tilde{F}^r_p(\lambda)$ для любых $\tau \in \mathbf{R}$ и $p > 0$.

Положим $W^r_\infty := \left\{x \in L^r_\infty : \ \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \leq 1\right\}$. В следующей теореме дано решение задачи (1.5) на классе функций $\tilde{F}^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $p,\ \lambda, > 0$. *Тогда для любой функции* $\Phi \in W$ *и произвольного отрезка* $[a,\ b] \in \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt : \ \ x \in \tilde{F}^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty\right\} = \int\limits_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right) dt, \tag{3.3}$$

где число τ *определено соотношением* (3.2). *В частности, для любого* $q \geq p$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b |x(t)|^q dt : \ \ x \in \tilde{F}^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty\right\} = \int\limits_a^b |\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные функцию $x \in \tilde{F}^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty$ и отрезок $[a,\ b] \in \mathbf{R}$. Представим длину отрезка $[a,\ b]$ в виде (3.1). Пусть $a_k := a + k\pi/\lambda,\ k = 0, 1, ..., n$. По лемме 3

$$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} \Phi(|x(t)|^p) dt \leq \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

и

$$\int\limits_{a_n}^{b} \Phi(|x(t)|^p) dt \leq \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt,$$

где $c-$ нуль, $m-$ точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,\,r}$, а число Θ определено равенством (3.1). Таким образом,

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p) dt \leq \ n \int\limits_c^{c+\pi/\lambda} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt + \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p) dt =$$

$$= \int_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p\right) dt,$$

причем равенство здесь достигается для функции $x(t) = \varphi_{\lambda,r}(t+\tau)$. Соотношение (3.3) доказано. Полагая в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, получим второе утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p > 0$. Если для функции $x \in L^r_\infty$ число λ выбрано так, что*

$$L(x)_p \le L(\varphi_{\lambda,r})_p \cdot \|x^{(r)}\|_\infty, \tag{3.4}$$

где величина $L(x)_p$ определена равенством (1.4), *то $x \in F^r_p(\lambda)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty$ и число $\delta \in (0,\, \pi/\lambda]$. Докажем неравенство

$$\|x\|_{p,\,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta} \cdot \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{3.5}$$

Ввиду однородности неравенств (3.4) и (3.5) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{3.6}$$

Для функций, удовлетворяющих ограниченим (3.4) и (3.6) в работе [6, лемма 3] доказано неравенство

$$\int_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r}(t)|^p\right) dt, \quad \Phi \in W,$$

для произвольного отрезка $[a,\, b]$, для которого $b - a \le \pi/\lambda$, где $m-$ точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а $2\Theta = b - a$. Полагая в этом неравенстве $\Phi(t) = t$ и учитывая (3.6), получаем оценку (3.5) и, как следствие, включение $x \in F^r_p(\lambda)$. Теорема 2 доказана.

Пусть $k,\, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p > 0$; $[a,\, b] \subset \mathbf{R}$. Снова представим длину отрезка $[a,\, b]$ в виде (3.1). Пусть далее $\tau_k \in \mathbf{R}$ таково, что

$$\varphi_{\lambda,\,r-k}(m_k + \Theta + \tau_k) = \varphi_{\lambda,\,r-k}(m_k - \Theta + \tau_k) = \|\varphi_{\lambda,\,r-k}\|_\infty, \tag{3.7}$$

где m_k- точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,\,r-k}$.

В следующей теореме дано решение задачи (1.7) на классе функций $\tilde F^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty$.

Теорема 3. *Пусть $k,\, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $\lambda > 0$. Тогда для любой функции $\Phi \in W$ и произвольного отрезка $[a,\, b] \in \mathbf{R}$*

$$\sup\left\{ \int_a^b \Phi\left(|x^{(k)}(t)|\right) dt : \; x \in \tilde F^r_p(\lambda) \bigcap W^r_\infty \right\} =$$

$$= \int_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t+\tau_k)|\right) dt, \tag{3.8}$$

где число τ_k определено в (3.7). В частности, для любого $q \geq 1$

$$\sup\left\{\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q dt : \quad x \in \tilde{F}_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r\right\} = \int_a^b |\varphi_{\lambda,\,r-k}(t+\tau)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные функцию $x \in \tilde{F}_p^r(\lambda) \bigcap W_\infty^r$ и отрезок $[a,\, b] \in \mathbf{R}$. Докажем (3.8). Без ограничения общности можно считать, что $\|x^{(r)}\|_\infty = 1$. Тогда согласно лемме 2 $\|x\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$. Отсюда в силу неравенства Колмогорова [8] имеем $\|x^{(i)}\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r-i}\|_\infty$, $i = 1, ..., r-1$. Поэтому для любого отрезка $[\alpha,\, \beta]$, для которого $|x^{(k)}(t)| > 0$, $t \in (\alpha,\, \beta)$, получаем

$$\int_\alpha^\beta |x^{(k)}(t)| = |x^{(k-1)}(\beta) - x^{(k-1)}(\alpha)| \leq 2\|x^{(k-1)}\|_\infty \leq 2\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\|_\infty = L(\varphi_{\lambda,r-k+1})_1.$$

Отсюда следует, что $L(x^{(k)})_1 \leq L(\varphi_{\lambda,r-k+1})_1$. Для функций $x \in W_\infty^r$, удовлетворяющих этому ограничению, и произвольного отрезка $[a,\, b]$ в работе [6, теорема 1] получена оценка

$$\int_a^b \Phi\left(|x^{(k)}(t)|\right) dt \leq \int_a^b \Phi\left(|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau_k)|\right) dt, \quad \Phi \in W,$$

где τ_k определено в (3.7). Равенство в этой оценке достигается для функции $x(t) = \varphi_{\lambda,r}(t+\tau_k)$. Соотношение (3.8) доказано. Полагая в нем $\Phi(t) = t^q$, получим второе утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

В следующей теореме приведены примеры функций класса $\tilde{F}_p^r(1)$.

Теорема 4. *Пусть $k,\, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p \geq 1$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$ имеет место неравенство*

$$L(x^{(k)})_p \leq L(\varphi_{r-k})_p \cdot \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{3.9}$$

В частности, для любой функции $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, в среднем равной нулю на периоде, имеет место включение $x \in \tilde{F}_p^r(1)$.

Доказательство. В работе [10] для функций $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$ доказано неравенство

$$L(x^{(k)})_p \leq \frac{L(\varphi_{r-k})_p}{\|\varphi_r\|_s^\alpha}\, E_0(x)_s^\alpha \cdot \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $p,\, s \geq 1$, $k < r$, $\alpha = (r-k+1/p)/(r+1/s)$, $E_0(x)_s-$ наилучшее приближение функции x константами в метрике пространства L_s. Из этого неравенства и неравенства типа Бора-Фавара $E_0(x)_s \le \|\varphi_r\|_s \cdot \|x^{(r)}\|_\infty$ (см, например, [4, §6.9]) следует (3.9).

Пусть теперь функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ в среднем равна нулю на периоде. Через x_1 обозначим ее первообразную. Ясно, что $x_1 \in L^{r+1}_\infty(I_{2\pi})$. Применяя к x_1 неравенство (3.9) при $k = 1$, получим $L(x)_p \le L(\varphi_r)_p \cdot \|x^{(r)}\|_\infty$. Из этого неравенства и теоремы 2 вследствие периодичности функции x следует включение $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Теорема 4 доказана.

Библиографические ссылки

1. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для производных и их приложения [Текст]/ Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// К.: Наукова думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям [Текст]/ В. Ф. Бабенко// Укр. мат. журн. – 2000. – 52, 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences [Text] / M. K. Kwong, A. Zettl [Text]// Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 150 p. (Lecture Notes in Math. – V. 1536).
4. *Bojanov B.* An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos [Text] / B. Bojanov, N. Naidenov// Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – 78. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A.* Shisha O., Variations on the Chebyshev and L^q Theories of Best Approximation [Text] / A. Pinkus, O. Shisha// Journal of Approximation Theory. – 1982. – 35, 2. – P. 148-168.
6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси [Текст] / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, 6. – С. 765 – 776.
7. *Кофанов В. А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций [Текст] / В. А. Кофанов// Укр. мат. журн. – 2015. – 67, 2. – С. 202 – 212.
8. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале [Текст] / А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – 470 с.– С. 252–263.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун// К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.
10. *Kofanov V. A.* Sharp inequalities of Bernstein and Kolmogorov type [Text] / V. A. Kofanov // East J. Approx. – 2005. – 11, 2. – C. 131-145.
11. *Корнейчук Н. П.* Аппроксимация с ограничениями [Текст] / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин// К.: Наукова думка, 1982. – 250 с.

Надійшла до редколегії 30.03.2017