УДК 517.5

О.В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет України,
Львів 79057 *E-mail: Lopotko13@gmail.com*

Інтегральне зображення додатно визначених ядер, що пов'язані з диференціальним виразом другого порядку еліптичного типу

Одержано інтегральне зображення додатно визначених ядер двох змінних, що пов'язані з диференціальним виразом другого порядку еліптичного типу.

Ключові слова: інтегральні зображення, додатно визначені функції.

Получено интегральное представление положительно определенных ядер двух переменных связанных с дифференциальным выражением второго порядка эллиптического типа.

Ключевые слова: интегральные представления, положительно определённые функции.

An integral representation of positive definite kernels of the two variables associated with differential expression of second order of elliptic type.

Key words: Integral representation, positive definite function.

Теорія самостряжених операторів, що діють в просторі з скалярним добутком, породженим додатно визначеним ядром потребує вивченню додатно визначених ядер. Так М.Г.Крейн в роботі [3] , застосував метод спрямованих функціоналів, одержав інтегральне зображення для таких додатно визначених ядер $k(x-y)$; $\dfrac{1}{2}\left[k(x+y) \pm k(x-y)\right]$; $k(x+y)$, $(x, y \in R^1)$. Згодом Ю.М. Березанський [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер за допомогою власних функцій диференціальних операторів як у звичайних, так і частинних похідних. Застосовуючи цей метод у монографії [2], доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначених (д.в.) ядер пов'язаних з оператором Лапласа

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{1}$$

У даній статті розглядається інтегральне зображення ядер зв'язаних з еліптичним виразом

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varphi_1(x_1 x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2(x_1 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2}$$

($\varphi_1,\ \varphi_2$ – деякі аналітичні функції).

© *О.В. ЛОПОТКО, 2017*

Теорема 1. *Нехай $K(x,y) \in C(R^2 \times R^2)$ – додатно визначене ядро, а рівності*

$$(\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda);\varphi(\xi)) = \frac{1}{2}[\varphi(x_1+ix_2)+\varphi(x_1-ix_2)]-$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}x_2\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\varphi(\xi)d\xi;$$
$$(\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda);\varphi(\xi)) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)\varphi(\xi)d\xi$$

визначають функціонали $\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ у просторі Z – цілих функцій, з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Для того щоб при будь-яких $x,y \in R^2$ мало місце інтегральне зображення представление

$$K(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y,\lambda);d\sigma_{\xi\eta}^{\alpha,\beta}(\lambda)) \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб $K(x,y)$ задовольняла (у сенсі узагальнених функцій Л.Шварца) рівнянню
$$L_xK = L_yK, \tag{4}$$

де $\sum(\lambda) = \left\|\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – аналитична міра, яка визначаєтьcя неоднозначно.

Доведення. Достатність. Нехай ядро $K(x,y) \in C(R^2 \times R^2)$ додатно визначено і для нього виконується (4) тоді, згідно з теоремою 3.1 [2, с. 653], маємо інтегральне зображення у вигляді абсолютно збіжного інтеграла

$$K(x,y) = \int\limits_{\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\Omega_\lambda(x,y)d\rho(\lambda), \tag{5}$$

де $d\rho(\lambda)$ – деяка міра, а $\Omega_\lambda(x;y)$ – сім'я елементарних д. в. ядер. Зведемо зображення (5) до зображення (3). Для цього знайдемо одну формулу для розв'язку рівняння $Lu = \lambda u$. Нехай $u(x_1,x_2)$ розв'язок рівняння на всій площині

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\varphi_1(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\varphi_2(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda u. \tag{6}$$

Так, як кожний розв'язок еліптичного рівняння з аналітичними коефіцієнтами є аналітичним, то існує ціла на кожній з комплексних змінних $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ функція $u(z_1,z_2)$, яка співпадає з $u(x_1,x_2)$, якщо $z_1 = x_1;\ z_2 = x_2$ і задовольняє (6).

Позначимо $v(x_1;x_2) = u(x_1,ix_2)$, $\psi_1(x_1x_2)=\varphi_1(x_1,ix_2)$, $\psi_2(x_1x_2)=\varphi_2(x_1,ix_2)$, тоді рівність (6) буде мати такий вигляд

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\psi_1(x_1x_2)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\psi_2(x_1x_2)\frac{i\partial v}{\partial x_2} = \lambda v. \tag{7}$$

Розв'яжемо рівняння (7) методом Рімана. Для цього спочатку знайдемо функцію Рімана подібно [5, стр. 135–136].

Нехай $v = v(z)$, де $z = \sqrt{(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}$, тоді ліва частина рівняння (7) буде мати такий вигляд:

$$v''(z)(z_{x_1}^2 - z_{x_2}^2) + v'(z)(z_{x_1x_1} - z_{x_2x_2}) + v'(z)z'_{x_1}\psi_1(z) + v'(z)z'_{x_2}\psi_2(z).$$

Оскільки $z_{x_1}^2 - z_{x_2}^2 = 1$; $z_{x_1x_1} - z_{x_2x_2} = \dfrac{1}{z}$; $z'_{x_1} = \dfrac{x_1-\xi}{z}$; $z'_{x_2} = -\dfrac{x_2-\eta}{z}$, то (7), якщо покладемо $\psi_1(z) = -\dfrac{1}{2(x_1-\xi)}$; $\psi_2(z) = \dfrac{1}{2i(x_2-\eta)}$ буде мати такий вигляд:

$$v''(z) = \lambda v(z). \tag{8}$$

Розв'язок (8), який задовольняє умові $v(0) = 1$ буде

$$v(z) = \cos\sqrt{-\lambda}\,z \quad \text{або} \quad v(x_1,x_2,\xi,\eta) = \cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}\right).$$

Тоді розв'язок рівняння (7), через початкові умови, можна записати наступним чином

$$\begin{aligned} v(x_1x_2) &= \frac{1}{2}\left[v(x_1-x_2,0)+v(x_1+x_2,0)\right] - \\ &-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\,x_2\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2}\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}}v\,(\xi,0)\,d\xi + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}\right)v'_{x_2}(\xi,0)d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Функція $v(z_1;z_2)$ має сенс для довільних z_1, z_2 і буде цілою по кожній змінній, зокрема буде цілою $v(z_1;0)$, а також $v'(z_1;0)$. Звідси випливає, що кожний доданок у правій частині (9) можна продовжити по x_2 у комплексну площину z_2. Поклавши $z_2 = -ix_2$ і враховуючи, що $v(x_1;-ix_2) = u(x_1;x_2)$ одержимо такий розв'язок (6)

$$\begin{aligned} u(x_1x_2) &= \frac{1}{2}\left[u(x_1-ix_2,0)+u(x_1+ix_2,0)\right] - \\ &-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\,x_2\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}u\,(\xi,0)\,d\xi + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)u'_{x_2}(\xi,0)d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Інтегрування ведеться по будь-якій спрямляючій дузі комплексної площини, яка з'єднує точки x_1+ix_2 і x_1-ix_2. Запишемо формулу (10) у скороченому вигляді.

Для цього позначимо через Z – простір цілих функцій $\varphi(\xi)$ однієї комплексної змінної ξ з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Тоді рівності

$$\left(X_\xi^{(0)}(x;\lambda);\varphi(\xi)\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x_1+ix_2)+\varphi(x_1-ix_2)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\,x_2\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\varphi(\xi)d\xi.$$

$$\left(X_\xi^{(1)}(x;\lambda),\varphi(\xi)\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-ix_2}^{x_1+ix_2}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)\varphi(\xi)d\xi \tag{11}$$

$$\left(x=(x_1,x_2\in\mathbb{R}^2;\ \varphi\in Z)\right)$$

визначають лінійні, неперервні функціонали $\chi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi^{(1)}(x;\lambda)$ у просторі Z.

У позначеннях (11) формула (10) набуває вигляду

$$u(x)=u(x_1,x_2)=\left(\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda);u(\xi,0)\right)+\left(\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda);u'_\eta(\xi,0)\right),\quad (x=(x_1,x_2)\in E_2). \tag{12}$$

Функції $\chi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi^{(1)}(x;\lambda)$ утворюють, у деякому сенсі, фундаментальну систему розв'язків (6). За допомогою цих розв'язків будемо виражати елементарні ядра $\Omega_\lambda(x,y)$.

Для цього введемо простір $Z\otimes Z$, який складається із функцій $\varphi(\xi;\eta)$ двох комплексних змінних ξ,η цілих по кожній змінній. Збіжність в $Z\otimes Z$ – рівномірна у кожній обмеженій (у просторі $((\xi;\eta)\in C_2)$ множині.

Далі побудуємо $X_\xi^{(\alpha)}\otimes\ X_\eta^{(\beta)}$ $(\alpha,\beta=0,1)$, наприклад $(\alpha=0;\beta=1):$

$$\left(X_\xi^{(0)}(x;\lambda)\otimes X_\eta^{(1)}(y;\lambda)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\left[\varphi(x_1+ix_2,\eta)+\varphi(x_1-ix_2,\eta\right]\cdot\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-\lambda}\,x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\frac{\sin(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2})}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$(x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2).$$

Нехай тепер $\Omega_\lambda\,(x,y)$ – сім'я елементарних д.в. ядер з (5) для ядра $K(x,y)$. По x і y $\Omega_\lambda(x,y)$ задовольняє (6), тому ця функція ціла по $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ і для $\forall\xi$ $\Omega_\lambda((\xi,0),y)$ і $\dfrac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi;0),y)$ також задовольняють по y рівняння (6), тому до ядра $\Omega_\lambda(x,y)$ спочатку можна застосувати (12) (по x), а потім аналогічно по y. У результаті одержимо

$$\Omega_\lambda\left(x,y\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\Big(\chi_\xi^{(\alpha)}\left(x;\lambda\right)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}\left(y;\lambda\right),\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)\Big), \tag{13}$$

де

$$\Omega_\lambda^{(0,0)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)=\Omega_\lambda\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right);\Omega_\lambda^{(1,0)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right);$$

$$\Omega_\lambda^{(0,1)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial y_2}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right);\Omega_\lambda^{(1,1)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)=\frac{\partial^2\Omega_\lambda}{\partial x_2\partial y_2}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right).$$

Підставивши (13) у (5) отримаємо (3), якщо покласти

$$\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\left(\Delta\right)=\int\limits_\Delta\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}\left(\left(\xi,0\right),\left(\eta,0\right)\right)d\rho\left(\lambda\right). \tag{14}$$

Інтеграл (3) розуміємо, як

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\,d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda))=$$

$$=\lim\sum_{v=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda_v)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(\lambda_v),\,\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta_v)),$$

где $\Delta_1,\dots\Delta_N$ – розбиття осі $(-\infty,\infty)$ на проміжку $\lambda_v\in\Delta_v$, а $\lim$ беремо по продовженню розбиття. Якщо $\chi_\xi^{(\alpha)}(\lambda)$ достатньо мале, а λ достатньо велике, то ця границя існує і не залежить від способу розбиття і вибору точок $\lambda_v\in\Delta_v$.

Тепер доведемо аналітичність міри $\sum(\Delta)$. Для цього розглянемо матрицю $\sum(\lambda)=\left\|\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – елементами якої будуть функції $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ із (14) – цілі по ξ,η і обмеженої варіації по λ і покажемо, що ця матриця є аналітичною мірою, тобто, що $\sum(\Delta)=\sum(b)-\sum(a)\ \ (\Delta=(a,b))$ додатно визначеною у такому сенсі: для довільних функціоналів $t_\xi^{(0)}$, $t_\xi^{(1)}$, які визначені над простором Z виконується нерівність

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\left(\Delta\right),\ t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)\geq 0.$$

Для цього виберемо спочатку пару точок $x_K\in R^1$ $(K=0,1)$ таким чином, щоб матриця $\left\|\chi_\xi^{\alpha}(x_K)\right\|_{K=0}^{1}$ була невираженою, а кожний функціонал представимо у вигляді $t_\xi^{(\alpha)}=\sum\limits_{k=0}^{1}C_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_k;\lambda)$ $(\alpha=0,1)$. Тоді

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}\left((\xi,0),(\eta,0)\right)\cdot t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)d\rho(\lambda)=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}\left((\xi,0),(\eta,0)\right)\sum_{j,k=0}^{1}C_j\overline{C}_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_j;\lambda)\otimes\chi_\xi^{(\beta)}(x_\eta;\lambda)\right)\cdot d\rho(\lambda)=$$

$$= \int\limits_{\Delta} \sum_{j,k=0}^{1} \Omega_\lambda \left((\xi, x_j), (\eta, \chi_k)\right) C_j \overline{C}_k d\rho(\lambda) \geq 0.$$

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай маємо інтегральне зображення (3). Потрібно довести рівність (4). Так, как ядро $\Omega_\lambda(x,y) = \sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{1} \left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda) \otimes \chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda)\right)$, сумовано по $(x,y,\lambda) \in \Im \times \Im \times R^2$ ($\Im \in R^2$ і обмежене) відносно міри $dxdyd\rho(\lambda)$, то законні наступні викладки

$$\begin{aligned}
\left\langle L^+u, v\right\rangle &= \int\limits_{\Im}\int\limits_{\Im} \left\{\int\limits_{R^2} \Omega_\lambda\left(x;y\right) d\rho\left(\lambda\right)\right\} \left(L^+u\right)\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy = \\
&= \int\limits_{R^2} \left\{\int\limits_{\Im}\int\limits_{\Im} \Omega_\lambda\left(x;y\right) \left(L^+u\right)\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy\right\} d\rho\left(\lambda\right) = \\
&= \int\limits_{R^2} \left\{\int\limits_{\Im}\int\limits_{\Im} \left(\overline{L_y^+}\Omega_\lambda\right)\left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy\right\} d\rho\left(\lambda\right) = \\
&= \int\limits_{R^2} \left\{\int\limits_{\Im}\int\limits_{\Im} \left(L_x^+\Omega_\lambda\right)\left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy\right\} d\rho\left(\lambda\right) = \\
&= \int\limits_{R^2} \left\{\int\limits_{\Im}\int\limits_{\Im} \Omega_\lambda\left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{L^+v\left(x\right)} dxdy\right\} d\rho\left(\lambda\right) = \left\langle u; L^+v\right\rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

(L^+ – звуження L на $u, v \in C_0^\infty(\Im)$). Із (15) випливає (4). Теорему доведено.

Доведена теорема стверджує, що методику одержання інтегрального зображення (6.14) з [2, с. 752] для додатно визначених ядер зв'язаних з виразом $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ можна застосувати і для виразу $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varphi_1(x_1,x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2(x_1,x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ ($\varphi_1(x_1,x_2)$, $\varphi_2(x_1,x_2)$ – деякі аналітичні функції).

Бібліографічні посилання

1. *Березанский Ю. М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов [Текст] / Ю. М. Березанский. // ДАН СССР, т.108, 1956, №3. – С. 893-896.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов [Текст] / Ю. М. Березанский. // К. : Наук. думка, 1965. – 800 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. // М. Гостехиздат. 1953. – 724 с.

Надійшла до редколегії 15.03.2016