УДК 517.5

**В. П. Моторний, У.П. Бабяк, К.Р. Студенікіна, М. В. Штацька**

Дніпропетровський національний уніиверситет ім. Олеся Гончара

# Властивості і наближення інтегрованих функцій

**Розглянуто деякі властивості інтегровних на сегменті функцій. Отримано оцінки для наближень.**

*Ключові слова: модуль неперервності, інтеграл, функція.*

**Рассмотрены некоторые свойства интегрируемых на сегменте функций. Получены оценки для приближений.**

*Ключевые слова: модуль непрерывности, интеграл, функция.*

**The some properties of the integrable on the segment functions were considered in this article. Estimates for approximation are obtained.**

*Key words: modulus of continuity, integral, function.*

Нехай функція $f$ належить простору $L^p_{[a;b]}$, $p \geq 1$ і $\omega_p(f,h) = \omega_p(f,[a;b],h)-$ її модуль неперервності, тобто величена

$$\omega_p(f,h) = \sup_{0<u\leq h} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 0 < h < 1.$$

Нарівні з модулем неперервності $\omega(f,[a;b],h)_p$ при умові, що функція $f$ визначена на сегменті $[a;2b-a]$ (наприклад, функція періодична з періодом $(b-a)$), розглядається модуль неперервності

$$\tilde{\omega}_p(f,h) = \tilde{\omega}_p(f,[a;b],h) = \sup_{0<u\leq h} \left\{ \int_a^{b} |f(x+u) - f(x)| dx \right\}^{1/p},$$

де $0 < h \leq b-a$.

Очевидно, що $\omega_p(f,h) \leq \tilde{\omega}_p(f,h)$ і існують функції, для яких $\omega_p(f,h)$ прямує до нуля, коли $h \to 0$, швидше $\tilde{\omega}_p(f,h)$. Наприклад, нехай $f(x) = 1$, якщо $x \in [0,1]$, і $f(x) = 0$, якщо $x \in (0,2]$. Тоді $\omega_p(f,h) = 0$, а $\tilde{\omega}_p(f,h) = h^{1/p}$.

Через $H^\omega_p$ позначимо клас функций, що визначені на сегменті $[a;b]$ і для яких $\omega_p(f,h) \leq \omega(h)$, де $\omega(h)-$ деякий модуль неперервності. В роботі для функцій із класу $H^\omega_1$ одержано оцінки норм $||f||_1$ і величин $\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(u)du$, де $[a;a+h] \subset [-1;1]$. Ці оцінки дозволили узагальнити деяки теореми про наближення функцій алгебраїчними поліномами у середньому. Доказани твердження про продовження функцій із класу $H_1^\omega$ і установлено зв'язок між модулями неперервності $\omega_p(f,h)$ і $\tilde{\omega}_p(f,h)$.

Нехай $x_k = -1 + k/n;\ k = 0, 1, \ldots, 2n,\quad L_{n,k} \equiv L_{n,k}(f) = =\ n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx,\ k = 1, 2, \ldots, 2n,\ \ L_n(f;x) =\ L_{n,k},\ x \in [x_{k-1}; x_k)$.

**Лема 1** [1, теорема 2]. *Нехай* $f \in H_p^\omega$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{2n-1} |L_{n,k+1} - L_{n,k}|^p \le n\omega_p^p(f;1/n). \tag{1}$$

**Доведення.** Застосуємо нерівність Гельдера, якщо $p > 1$, і одержимо

$$\sum_{k=1}^{2n-1} |L_{n,k+1} - L_{n,k}|^p = n^p \sum_{k=0}^{2n-2} \left| \int_{x_k+1/n}^{x_k+2/n} f(x)dx - \int_{x_k}^{x_k+1/n} f(x)dx \right|^p =$$

$$= n^p \sum_{k=0}^{2n-2} | \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x+1/n) - f(x)]dx|^p \le$$

$$\le n \sum_{k=0}^{2n-2} | \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x+1/n) - f(x)|^p dx \le n\omega^p(f;1/n)_p.$$

Лема доведена.

**Лема 2.** [2] *Нехай функція* $f \in L^p_{[a,b]},\ \infty < a < b < \infty$ *Тоді*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(u)|^p dxdu \le 2 \int_0^{b-a} \int_a^{b-\xi} |f(y+\xi) - f(y)|^p dyd\xi, \tag{2}$$

*зокрема*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(u)|^p dxdu \le 2 \int_0^{b-a} \omega_p^p(f, [a;b], \xi)d\xi.$$

**Лема 3.**[1, 3] *Для будь-якої функції* $f \in L^p_{[-1,1]}$ *має місце нерівність*

$$\int_{-1}^1 |f(x) - L_n(f;x)|^p dx \le 2n \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^{1/n} \int_{a_k}^{a_{k+1}-\xi} |f(y+\xi) - f(y)|^p dyd\xi,$$

*зокрема,*

$$\int_{-1}^1 |f(x) - L_n(f;x)|^p dx \le 2n \int_0^{1/n} \omega_p^p(f,\xi)d\xi \le 2\omega_p^p(f,1/n). \tag{3}$$

**Доведення.** Використовуючи означення функції $L_n(f;x)$, нерівність Гельдера, якщо $p \ge 1$, і нерівність (2), одержимо:

$$\int_{-1}^1 |f(x) - L_n(f;x)|^p dx \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - n\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(y)dy|^p dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} n^p | \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(x) - f(y)] dy|^p dx \leq$$

$$\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(y)|^p dy dx \leq$$

$$\leq 2n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{0}^{1/n} \int_{a_k}^{a_{k+1}-\xi} |f(y+\xi) - f(y)|^p dy d\xi \leq$$

$$\leq 2n \int_{0}^{1/n} [\sum_{k=0}^{n-2} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(y+\xi) - f(y)|^p dy + \int_{a_{n-1}}^{1-\xi} |f(y+\xi) - f(y)|^p dy] d\xi \leq$$

$$\leq 2n \int_{0}^{1/n} \omega_p^p(f,\xi) d\xi \leq 2\omega_p^p(f, 1/n).$$

Нерівність (3) з константой $4^p$ (замість 2) одержано в [3].

Лема доведена.

**Теорема 1.** *Для будь-якої функції $f \in H_1^\omega$, що у середньому дорівнює нулю і для будь-якого натурального $n \geq 2$ має місце нерівність*

$$||f||_1 \leq 3n\omega(f, 1/n) \leq 3n\omega(1/n). \tag{4}$$

**Доведення.** Нехай $L_{n,k_2}(f) = \max_{1\leq k\leq 2n} Ln,k(f)$, $L_{n,k_1}(f) = \min_{1\leq k\leq 2n} Ln,k(f)$. Оскільки функції $f$ середньому дорівнює нулю, то $L_{n,k_2}(f) \geq 0$, а $L_{n,k_1}(f) \leq 0$. Припустивши, що $k_2 > k_1$ і використовуючи означення чисел $L_{n,k_2}(f)$ і $L_{n,k_1}(f)$, тотожність

$$L_{n,k_2}(f) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} (L_{n,k+1} - L_{n,k}) + L_{n,k_1}.$$

і нерівність (1), одержимо

$$||L_n(f)||_1 \leq 2(L_{n,k_2}(f) - L_{n,k_1}) =$$

$$= 2\sum_{k=k_1}^{k_2-1} (L_{n,k+1} - L_{n,k}) \leq 2\sum_{k=k_1}^{k_2-1} |L_{n,k+1} - L_{n,k}| \leq$$

$$\leq 2n\omega(f; 1/n)_1 \leq 2n\omega(1/n).$$

Якщо $k_1 > k_2$ міркування анологічне. Із леми 3 і одержаних нерівностей маємо

$$||f||_1 \leq ||L_n(f)||_1 + ||f - L_n(f)||_1 \leq 2n\omega(f, 1/n) + 2\omega(f, 1/n).$$

Зокрема, якщо $n \geq 2$,

$$||f||_1 \leq 3n\omega(f, 1/n).$$

Теорема доведена.

**Лема 4.** *Нехай функція $f(x)$ інтегровна на сегменті $[-1;1]$, $n-$ натуральне число більше або дорівнює 3. Існує сегмент $[x_i, x_{i+1}]]$, такий, що*

$$2n\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(t)|dt \leq ||f||_1,$$

*тобто* $L_{h,i+1}(f) \leq L_{h,i+1}(|f|) \leq \frac{1}{2}||f||_1$.

**Доведення.** Оскільки

$$\|f\|_1 = \sum_{j=0}^{2n-1}\int_{x_j}^{xj+1}|f(x)|dx,$$

то знайдеться сегмент $[x_i, x_{i+1}]$, такий, що

$$2n\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(t)|dt \leq ||f||_1.$$

Лема доведена.

**Теорема 2.** *Для будь-якої функції $f \in H_1^\omega$, що у середньому дорівнює нулю і для будь-якого натурального $s \leq 2n$ має місце нерівність*

$$|L_{n,s}| \leq n\omega(f;1/n)_1 + ||f||_1.$$

**Доведення.** Очевидно, що для будь-якого натурального $s \leq 2n$

$$L_{n,s} = \sum_{j=k}^{s-1}(L_{n,j+1} - L_{n,j}) + L_{n,k}.$$

Візьмемо $k$ рівним $i+1$, де $i$ визначено в лемі 4 і застосуємо лему 1:

$$|L_{n,s}| \leq \sum_{j=i_0+1}^{s-1}|L_{n,j+1} - L_{n,j}| + L_{n,i+1} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{s-1}|L_{n,j+1} - L_{n,j}| + ||f||_1 \leq n\omega(f;1/n)_1 + ||f||_1.$$

Теорема доведена.

Із нерівності (4 ) і теореми 2, якщо $n \geq 2$, випливає оцінка

$$|L_{n,s}| \leq 4n\omega(f;1/n) \leq 4n\omega(1/n). \tag{5}$$

**Теорема 3.** *Якщо* $f \in H_1^\omega$, *і у середньому дорівнює нулю, де* $\omega(t)/t$ *не зростає, то має місце нерівність*
$$\int_{1-n^{-2}}^1 \frac{|L_{n^2,2n^2}(f)|}{\omega(\sqrt{1-x}/n)}dx \le 8.$$

**Доведення.** Оскільки для $x \in [1-n^{-2};1]$ виконується нерівність $\sqrt{1-x}/n \le 1/n^2$ і $\omega(t)/t$ не зростає, то для $x \in [1-n^{-2};1]$ має місце нерівність

$$\frac{\omega(\sqrt{1-x}/n)}{\sqrt{1-x}/n} \ge \frac{\omega(1/n^2)}{1/n^2}.$$

Отже
$$\frac{|L_{n^2,2n^2}(f)|}{\omega(\sqrt{1-x}/n)} \le \frac{|L_{n^2,2n^2}(f)|}{n\omega(1/n^2)\sqrt{1-x}}$$

З останньої нерівності і нерівності (5), у якої замість $n$ треба взяти $n^2$ а $s = 2n^2$, випливає
$$\int_{1-n^{-2}}^1 \frac{|L_{n^2,2n^2}(f)|}{\omega(\sqrt{1-x}/n)}dx \le 4\int_{1-n^{-2}}^1 \frac{n^2\omega(1/n^2)dx}{n\omega(1/n^2)\sqrt{1-x}} =$$
$$= 4n\int_{1-n^{-2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \le 8.$$

Теорема доведена.

**Зауваження 1.** Відомо [4], що якщо функція $\omega(t)$ є модулем неперервності, то функція
$$\omega^\star(t) = t \inf_{0\le x\le t} \frac{\omega(x)}{x}$$
теж є модулем неперервності, $\frac{\omega^\star(t)}{t}$ не зростає і мають місце нерівності :
$$\omega^\star(t) \le \omega(t) \le 2\omega^\star(t). \tag{6}$$

Завдяки нерівностям (6) модулі неперервності $\omega(t)$ і $\omega^\star(t)$ мають один і той же порядок прямування до нуля. Тому у задачах, у яких необхідно знайти порядок прямування до нуля деякій величини, що залежить від порядка прямування до нуля модуля неперервності $\omega(t)$, можливо вважати, що $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає. Отже умова у теоремі 3: "$\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає" не є обмеженням.

**Теорема 4.** *Якщо* $f \in H_1^\omega$, *і у середньому дорівнює нулю, де* $\omega(t)/t$ *не зростає і виконується умова*
$$\omega(mt) \le C_\gamma m^\gamma \omega(t), \tag{7}$$
*де* $0 < t \le m \le 1$, *а* $\gamma, C_\gamma-$ *деякі додатні константи,то має місце нерівність*

$$\int_{1-n^{-2}}^1 \frac{|f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n)}dx \le \frac{C_\gamma 2^{-\gamma/2}}{1-2^{-\gamma/2}}.$$

**Доведення.** Нехай $n = 2^{i+1}$. Використуємо монотонність модуля неперервності $\omega(t)$ и нерівність (6).

$$\int_{1-n^{-2}}^{1} \frac{|f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n)}dx \le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \int_{1-1/2^k}^{1-1/2^{k+1}} \frac{|f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x}/n)}dx \le$$

$$\le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \int_{1-1/2^k}^{1-1/2^{k+1}} \frac{|f(x)|}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))}dx \le$$

$$\le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{1}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))} \int_{1-1/2^k}^{1-1/2^{k+1}} |f(x)|dx \le$$

$$\le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{1}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))} 2^{-k-1} L_{2^{k+1},2^{k+2}-1}(|f|) \le$$

$$\le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{4}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))} (\omega(|f|;2^{-k-1}) + ||f||2^{-k-1}) \le$$

$$\le \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{4}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))} \omega(n2^{(-k-1)/2}\cdot 1/(n\cdot 2^{(k+1)/2})).$$

Використовуючи умову (7), оцінемо суму:

$$\sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{4}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}))} \omega(n2^{(-k-1)/2}\cdot 1/(n\cdot 2^{(k+1)/2})) \le$$

$$\le C_\gamma \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} \frac{(n^2/2^{(k+1)})^{\gamma/2}}{\omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2})} \omega(1/(n\cdot 2^{(k+1)/2}) =$$

$$= C_\gamma \sum_{k=2(i+1)}^{\infty} (n^2/2^{(k+1)})^{\gamma/2}.$$

Одержана сума спадаючої геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $2^{(i+1)\gamma}\cdot 2^{-(i+1+1/2)\gamma} = 2^{-\gamma/2}$, а знаменик $q = 2^{-\gamma/2}$.Отже

$$\int_{1-n^{-2}}^{1} \frac{|f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n)}dx \le \frac{C_\gamma 2^{-\gamma/2}}{1-2^{-\gamma/2}}.$$

Теорема доведена.

**Зауваження 2.** Умову (7), наприклад, задовольняють наступні функції: $\omega(t) =$
$= t^\alpha, \alpha \in (0;1], t \ge 0$, $\omega(t) = t^\alpha \ln\frac{e}{t}, t \in [0;1], \alpha \in (0;1]$, та інші. Зокрема має місце теорема.

**Теорема 5.** *Якщо* $\alpha \in (0;1)$, *функція* $\nu(u)$, *що диференційвна на* $[0;1]$, *не спадає, і виконуєтьcя нерівність*

$$\nu'(u) \le \frac{\alpha\nu(u)}{u}, \tag{8}$$

*то функція*

$$\omega(t) = \int_0^t \frac{\nu(u)}{u^\alpha} du, \quad t \in [0;1] \tag{9}$$

*є модулем неперервності і задовольняє нерівність* (7), *де* $\gamma = 1 - \alpha$, $C_\gamma = 1$.

**Доведення.** Нехай функція $\omega(t)$ зображена рівностю (9). Тоді майже скрізь на інтервалі $(0;1)$ існує похідна

$$\omega'(t) = \frac{\nu(t)}{t^\alpha},$$

яка завдяки нерівності (8) не зростає, це означає, що функція $\omega(t)$, що визначаєтьcя рівністю (9) опукла, отже є модулем неперервності. Розгляемо $\omega(mt)$ :

$$\omega(mt) = \int_0^{mt} \frac{\nu(u)}{u^\alpha} du.$$

Зробемо у інтегралі заміну змінної $u = mx$. Маємо $du = mdx$, і оскільки функція $\nu(u)$ не спадає і $m \in (0;1)$, одержемо нерівність $\nu(mu) \le \nu(u)$. Отже

$$\omega(mt) = m^{1-\alpha} \int_0^t \frac{\nu(mu)}{u^\alpha} \le m^{1-\alpha} \int_0^t \frac{\nu(u)}{u^\alpha} du = m^{1-\alpha}\omega(t).$$

**Зауваження 3.** Якщо опуклий модуль неперервності $\omega(t)$ має абсолютно неперервну похідну і при деякому $\alpha \in (0;1)$ функція $t^\alpha\omega'(t)$ не спадає, то $\omega(t)$ можливо зобразити у вигляді (9), поклавши $\nu(t) = t^\alpha\omega'(t)$. При цьому нерівність (8) випливає з опуклості функції $\omega(t)$. Оскільки функція $t^\alpha\omega'(t)$ не спадає то

$$\omega(mt) = \int_0^{mt} \omega'(u)du = \int_0^{mt} \frac{\omega'(u)u^\alpha}{u^\alpha} du =$$

$$= \int_0^t \frac{\omega'(mx)(mx)^\alpha}{(mx)^\alpha} mdx \le m^{1-\alpha} \int_0^t \frac{\omega'(x)x^\alpha}{x^\alpha} dx =$$

$$= m^{1-\alpha} \int_0^t \omega'(x)dx = m^{1-\alpha}\omega(t).$$

**Зауваження 4.** Із (6) випливає, що якщо модуль неперервності $\omega(t)$ задовольняє нерівність (7), то $\omega^\star(t)$ теж задовольняє нерівність (7). Дійсно

$$\omega^\star(mt) \le \omega(mt) \le C_\gamma m^\gamma \omega(t) \le 2C_\gamma m^\gamma \omega^\star(t).$$

Із теорем 3 і 4 випливає наступне твердження:

**Теорема 6.** *Для довільної функції $f \in H_1^\omega$, де модуль неперервності $\omega(t)$, такий, що $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає і задовольняє нерівність (7), існує константа $C_\gamma$ і послідовність алгебраїчних поліномів $P_n(x)$ степеня $n$ такі, що виконується нерівність*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}\right)} \right| dx \leq C_\gamma \ln n. \tag{10}$$

Для модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ цей результат одержено в роботі [5]. В [6] доведена наступна теорема.

**Теорема 7.** *Нехай функція $f \in H_1^\omega$, де модуль неперервності $\omega(t)$, такий, що $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає. Тоді існує константа $C$ і послідовність алгебраїчних поліномів $P_n(x)$ степеня $n$ такі, що виконується нерівність*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right| dx \leq C \ln n. \tag{11}$$

Для модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ цей результат одержено в роботі [1]. Щоб довести теорему 6 достатньо показати, що для функции $f \in H_1^\omega$, де модуль неперервності $\omega(t)$, такий, що $\frac{\omega(t)}{t}$ не зростає і задовольняє нерівність (7), і послідовності алгебраїчних поліномів $P_n(x)$, існування яких доведено в теоремі 7, виконується нерівність

$$\left( \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} + \int_{1-\frac{1}{n^2}}^{1} \right) \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}\right)} \right| dx \leq C_\gamma. \tag{12}$$

Із теореми 4, за указаними умовами до модуля неперервності $\omega(t)$, випливає

$$\int_{1-n^{-2}}^{1} \frac{|f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n)} dx \leq \frac{C_\gamma 2^{-\gamma/2}}{1-2^{-\gamma/2}},$$

де константа $\gamma$ визначається умовою (7). Аналогічно одержемо оцінку інтеграла по сегменту $[-1; -1 + 1/n^2]$. Із теореми 3 випливає оцінка

$$\left( \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} + \int_{1-\frac{1}{n^2}}^{1} \right) \left| \frac{P_n(x)}{\omega\left(\sqrt{1-x^2}\frac{1}{n}\right)} \right| dx \leq C_\gamma.$$

В наступних твердженнях розглянемо продовження функцій із класу $H_1^\omega$ і установимо зв'язок між модулями неперервності $\omega_p(f,h)$ і $\tilde{\omega}_p(f,h)$.

**Теорема 8.** *Нехай функція $f \in L_{[0,a]}$ і*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in [0; a], \\ f(2a - x), & \text{якщо } x \in (a; 2a). \end{cases}$$

*Тоді*

$$\omega_p(f,[0;a],h) \le \tilde{\omega}_p(F,[0;a],h) \le C\omega_p(f,[0;a],h).$$

**Доведення.** Завдяки означенню функции $F(x)$ и модулів неперервності перша із нерівностей очевидна. Щоб довести другу, покладемо

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & \text{якщо } x \in [0;a-h] \cup [a+h;2a], \\ \frac{1}{h}\int_{a-h} F(u)du, & \text{якщо } x \in (a-h;a+h). \end{cases}$$

Внаслідок рівності

$$F(x) = F_1(x) + F(x) - F_1(x)$$

маємо

$$\tilde{\omega}_p(F,h) \le \tilde{\omega}_p(F_1,h) + \tilde{\omega}_p(F-F_1,h).$$

Очевидно, що

$$\tilde{\omega}_p(F-F_1,h) = \sup_{0<u\le h}\{\int_0^a |F(x+u)-F_1(x+u)-F(x)+F_1(x)|^p dx\}^{1/p} \le$$

$$\le \sup_{0<u\le h}(\{\int_0^a |F(x+u)-F_1(x+u)|^p dx\}^{1/p} + \{\int_0^a |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p}) =$$

$$= \sup_{0<u\le h}(\{\int_u^{a+u} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} + \{\int_0^a |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p}).$$

Розглянемо перший доданок у двох випадках. Перший випадок: $u \le a-h$, Тоді

$$\{\int_u^{a+u} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} = \{\int_u^{a-h} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} +$$

$$+\{\int_{a-h}^a |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} + \{\int_a^{a+u} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p}.$$

Оскільки $F(x)-F_1(x)$, якщо $x \in [0,a-h)$, то перший доданок дорівнює нулю, а завдяки симметричності функции $F(x)-F_1(x)$ относительно точки $a$, другий і третій інтеграли збігаються. Таким чином в цьому випадку

$$\tilde{\omega}_p(F-F_1,h) \le 3\int_{a-h}^a |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p}.$$

Нехай тепер $u > a-h$. Використовуючи симетричность функції $F(x)-F_1(x)$ відносно о точки $a$, нерівність $u \le h$ і включення $(u;a+u) \subset (a-h;a+h)$ одержимо:

$$\{\int_u^{a+u} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} \le \{\int_{a-h}^{a+h} |F(x)-F_1(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= 2\{\int_{a-h}^{a} |F(x) - F_1(x)|^p dx\}^{1/p}$$

Застосовуючи нерівність Гельдера, якщо $p > 1$, умову $0 \le u \le h$ і лему 3 маємо

$$\omega_p^*(F - F_1, h) \le 3\{\int_{a-h}^{a} |F(x) - F_1(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= 3\{\int_{a-h}^{a} |\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} [F(x) - F(u)]du|^p dx\}^{1/p} \le$$

$$\le 3h^{-1/p}\{\int_{a-h}^{a}\int_{a-h}^{a} |f(x) - f(u)|^p dxdu\}^{1/p} \le$$

$$\le 3h^{-1/p}2^{1/p}\{\int_{0}^{h} \omega_p^p(f, a-h, a, y)dy\}^{1/p} \le$$

$$\le 3 \cdot 2^{1/p}\omega_p(f, a-h, a, h) \le 3 \cdot 2^{1/p}\omega_p(f, 0, a, h).$$

Оценимо $\tilde{\omega}_p(F_1, h)$.

$$\tilde{\omega}_p(F_1, h) = \sup_{0<u\le h}\{\int_{0}^{a} |F_1(x+u) - F_1(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_{0}^{a-u} |F_1(x+u) - F_1(x)|^p dx + \int_{a-u}^{a} |F_1(x+u) - F_1(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_{0}^{a-u} |f(x+u) - f(x)|^p dx\}^{1/p} = \omega_p(f, 0, a, h),$$

оскільки для $x \in (0, a-u)$ : $F_1(x+u) = f(x+u)$ і $F_1(x) = f(x)$, а для $x \in (a-u, a)$ : $F_1(x+u) - F_1(x) = 0$.

Теорема доведена.

**Теорема 9.** *Має місце нерівність*

$$\omega_p(F, [0; 2a], h) \le \sqrt{2}\tilde{\omega}_p(F, [0; a], h),$$

*де*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in [0; a], \\ f(2a - x), & \text{якщо } x \in (a; 2a]. \end{cases}$$

**Доведення.**

$$\omega_p^p(F, [0; 2a], h) = \sup_{0<u\le h}\int_{0}^{2a-u} |F(x+u) - F(x)|^p dx =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_{0}^{a} |F(x+u) - F(x)|^p dx + \int_{a}^{2a-u} |F(x+u) - F(x)|^p dx\} =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_0^a |F(x+u)-F(x)|^p dx + \int_a^{2a-u} |f(2a-x-u)-f(2a-x)|^p dx\} =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_0^a |F(x+u)-F(x)|^p dx - \int_a^{u} |f(y-u)-f(y)|^p dy\} =$$

$$= \sup_{0<u\le h}\{\int_0^a |F(x+u)-F(x)|^p dx + \int_0^{a-u} |f(y+u)-f(y)|^p dy\} \le$$

$$\le \sup_{0<u\le h} 2\int_0^a |F(x+u)-F(x)|^p dx = 2\tilde{\omega}_p(F,[0;a],h)^p.$$

Теорема доведена.

## Бібліографічні посилання


1. *Моторный В.П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике $L_p$|Текст| /В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1971.–Т. 35, №4. – С. 874–899.
2. *Ульянов П.Л.* О рядах по системе Хаара |Текст| /П.Л. Ульянов // Математический сборник, – 1964.–Т. 63, № 3 - С. 356-391.
3. *Ульянов П.Л.* Вложение некоторых классов функций $H_p^\omega$|Текст| /П.Л. Ульянов //Изв. АН СССР, Сер. матем.– 1968.–Т. 32, №3 – С. 649-686.
4. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного |Текст|/А.Ф. Тиман. - М. : Физматгиз, 1960. - 624 с.
5. *Ходак Л. Б.* Некоторые вопросы приближения непериодических функций алгебраическими многочленами |Текст|/ Л. Б. Ходак.– Дис. ... канд. физ. – мат. наук. Днепропетровск, 1979. 108 с.
6. *Моторный В.П.* Наближення функцій алгебраїчними многочленами в середньому|Текст| /В.П. Моторный, М.С. Клименко //Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Математика – 2012, Вип.17. С. 106 - 117.


*Надійшла до редколегії 15.05.2017*