ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2017, вип. **22**

УДК 517.5

А. М. Пасько
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. *E-mail: pasko08@meta.ua*

Покращення гладкості функцій неперервними за мірою білінійними операторами

Розглянуто дію послідовностей переставних зі зсувами за обома аргументами, неперервних за мірою білінійних операторів на функції класів Гьольдера – Ліпшиця. З допомогою прямих та обернених теорем теорії наближень установлено покращення гладкості таких функцій, рівномірне для всіх членів послідовності.

Ключові слова: білінійні оператори, перестановність зі зсувами, гладкі функції.

Разсмотрено действие последовательностей перестановочных со сдвигами по двум аргументам, непрерывных по мере билинейных операторов на функции классов Гёльдера-Липшица. С помощью прямых и обратных теорем теории приближений установлено повышение гладкости таких функций, равномерное для всех членов последовательности.

Ключевые слова: билинейные операторы, перестановочность со сдвигами, гладкие функции.

The sequences of the translation invariant by the both arguments, continuous bilinear operators $T_n : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$ has been considered. The improvement of the smoothness of the functions belonging to the Lipschitz – Holder classes has been established.

Key words: bilinear operators, translation invariant, smooth functions.

Нехай $L_p, 1 \leq p < \infty$ – простір усіх вимірних 2π-періодичних функцій, таких що $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$, наділений нормою

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

L_∞ – простір усіх істотно обмежених 2π-періодичних функцій, наділений нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup|f(x)|$, L_0 – простір усіх вимірних 2π-періодичних функцій із топологією збіжності за мірою.

Розглянемо послідовність неперервних білінійних операторів $T_n : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$. Ця послідовність називається слабо обмеженою за мірою, якщо для будь-яких функцій $f, g \in L_1$ існує вимірна на $[0, 2\pi]$ монотонно незростаюча функція $C(t)$, така що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $t \in [0, 2\pi]$

$$P\left(T_n(f, g), t\right) \leq C(t),$$

де $P\left(T_n(f, g), t\right)$ – незростаюче переставлення функції $T_n(f, g)$, функція $C(t)$ не залежить від n, але може залежати від f та g.

Для $h \in \mathbb{R}$ оператором зсуву називається оператор $\tau_h : L_0 \longrightarrow L_0$, заданий рівністю $\tau_h f(\cdot) = f(\cdot + h)$. Неперервний білінійний оператор $T : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$ називається переставним зі зсувами за обома аргументами, якщо для будь-яких двох функцій $f, g \in L_1$ і будь-якого $h \in \mathbb{R}$

$$\tau_h T(f, g) = T(\tau_h f, g) = T(f, \tau_h g).$$

У праці [1] доведено теорему.

Теорема 1. *Нехай переставні зі зсувами за обома аргументами неперервні білінійні оператори $T_n : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$ утворюють слабо обмежену за мірою послідовність. Тоді, якщо дійсні числа $r, p, q, 1 < r \leq \infty, 1 \leq p, q < \infty$, пов'язані співвідношенням*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

то для будь-яких $f \in L_p, g \in L_q$ образи $T_n(f, g) \in L_r$ і

$$\|T_n(f, g)\|_r \leq C_{p,q,r} \|f\|_p \|g\|_q,$$

де стала $C_{p,q,r}$ не залежить ані від номера n, ані від функцій f, g.

Цей результат узагальнює на випадок білінійних операторів одержану С.О. Пічуговим таку теорему, котру можна вивести з основного результату праці [2].

Теорема 2. *Нехай неперервні за мірою лінійні оператори $T_n : L_1 \longrightarrow L_0$, переставні зі зсувами, утворюють слабо обмежену за мірою послідовність. Тоді для будь-якого $p, 1 < p < \infty$, оператори T_n обмежено переводять L_p в L_p, та норми $\|T_n\|_{p \to p}$ обмежені однією й тією ж, незалежною від n сталою*

$$\|T_n\|_{p \to p} \leq C_p.$$

Нехай r – ціле невід'ємне число, $\alpha \in (0, 1]$, K – додатна стала, $1 \leq p \leq \infty$. Через $W^r K H_p^\alpha$ позначають клас 2π-періодичних функцій, $(r-1)$-ша похідна яких абсолютно неперервна на $[0, 2\pi]$, а модуль неперервності r-ї похідної в просторі L_p задовольняє умову

$$\omega(f^{(r)}, t)_p \leq K t^\alpha.$$

Через $W^r KZ_p$ позначимо клас 2π-періодичних функцій, $(r-1)$-ша похідна яких абсолютно неперервна на $[0, 2\pi]$, а

$$\omega(f^{(r)}, t)_p \leq Kt|\ln t|.$$

Позначивши через $[x], \{x\}$, як завжди, цілу й дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$, сформулюємо основний результат цієї статті.

Теорема 3. *Нехай $T_n : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$ – слабо обмежена за мірою послідовність неперервних білінійних операторів, переставних зі зсувами за обома аргументами, дійсні числа $s, p, q, 1 < s \leq \infty, 1 \leq p, q < \infty$, пов'язані співвідношенням $1+\frac{1}{s} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Тоді для будь-яких функцій $f \in W^{r_1} K_1 H_p^{\alpha}, g \in W^{r_2} K_2 H_q^{\beta}$ їх образи*

$$T_n(f, g) \in W^{r_1+r_2+[\alpha+\beta]} KH_s^{\{\alpha+\beta\}},$$

якщо $\{\alpha + \beta\} \neq 0$, і

$$T_n(f, g) \in W^{r_1+r_2+\alpha+\beta-1} KZ_s,$$

якщо $\{\alpha + \beta\} = 0$, де стала K не залежить ані від номера n, ані від функцій f, g (залежить лише від параметрів, що визначають класи $W^{r_1} K_1 H_p^{\alpha}, W^{r_2} K_2 H_q^{\beta}$).

Нехай F_{2m+1} – простір тригонометричних поліномів порядку, не вищого за m. Для доведення теореми 3 нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Нехай $T : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$ – неперервний білінійний оператор, переставний зі зсувами за обома аргументами. Якщо хоча б одна з функцій f, g належить F_{2m+1}, то $T(f, g) \in F_{2m+1}$.*

Доведення. У праці [1] доведено рівність

$$T(e^{ikt}, e^{ilt})(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq l; \\ \lambda_k e^{ikx}, & \text{якщо } k = l, \end{cases}$$

з якої випливає, що для двох тригонометричних поліномів f, g функція $T(f, g)$ – тригонометричний поліном порядку, не вищого $\min\{\deg f, \deg g\}$. Нехай тепер $f \in F_{2m+1}$, $g \in L_1$, g_n – послідовність тригонометричних поліномів, збіжна в L_1 до функції g. Для будь-якого n $T(f, g_n) \in F_{2m+1}$, і послідовність тригонометричних поліномів $T(f, g_n)$ збігається до $T(f, g)$ у просторі L_0. Скінченовимірний лінійний багатовид F_{2m+1} утворює (замкнений) підпростір лінійного топологічного простору L_0 (див. [4], стор. 99), отже $T(f, g) \in F_{2m+1}$. Аналогічно розглядаємо випадок $f \in L_1$, $g \in F_{2m+1}$. Доведення леми завершено.

Доведення теореми 3. Нехай f_m, g_m – відповідно тригонометричні поліноми порядку m найкращого наближення функцій f, g у просторах L_p, L_q. Тоді, згідно з теоремою 1,

$$\|T_n(f, g) - T_n(f_m, g) - T_n(f, g_m) + T_n(f_m, g_m)\|_s = \|T_n(f - f_m, g - g_m)\|_s \leq$$

$$\leq C_{p,q,s}\|f-f_m\|_p\|g-g_m\|_q = C_{p,q,s}E_m(f)_pE_m(g)_q$$

З огляду на лему 1 $T_n(f_m,g)+T_n(f,g_m)-T_n(f_m,g_m)\in F_{2m+1}$, отже

$$E_m(T_n(f,g))_s \leq C_{p,q,s}E_m(f)_pE_m(g)_q.$$

Скориставшись теоремою Джексона для наближень тригонометричними поліномами в просторах із інтегральною метрикою (див. [3], стор. 306) і тим, що $f\in W^{r_1}K_1H_p^{\alpha}, g\in W^{r_2}K_2H_q^{\beta}$, одержимо

$$E_m(T_n(f,g))_s \leq \frac{9C_{p,q,s}K_1K_2}{m^{r_1+r_2+\alpha+\beta}}. \tag{1}$$

Відомо (див. [3], стор. 350), що якщо для цілого невід'ємного r, $\gamma\in(0,1]$ і функції $h\in L_s$ виконуються нерівності

$$E_m(h)_s \leq \frac{C}{m^{r+\gamma}}$$

з однаковою для всіх натуральних m сталою C, то h має на $[0,2\pi]$ абсолютно неперервну похідну порядку $(r-1)$, а

$$\omega(h^{(r)},t)_s \leq Kt^{\gamma},$$

при $\gamma<1$, і

$$\omega(h^{(r)},t)_s \leq Kt|\ln t|,$$

при $\gamma=1$, K – стала, залежна лише від s,r,γ,C. Порівнюючи це з (1), одержуємо твердження теореми 3. Доведення теореми завершено.

Бібліографічні посилання

1. П*асько, А. М.* Білінійні оператори, неперервні за мірою [Текст] / А. М. Пасько // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 2002. – Вип. 7. – С. 60–72.
2. П*ічугов, С. О.* Теорема Стейна про обмежені за мірою оператори [Текст] / С. О. Пічугов // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика. – 2002. – Вип. 7. – С. 82–83.
3. Т*иман, А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного [Текст] / А. Ф. Тиман// – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 624 с.
4. Э*двардс, Р.Е.* Функциональный анализ [Текст] / Р.Е. Эдвардс// – М.: Мир, 1969. – 1072 с.

Надійшла до редколегії 20.01.2017