ISSN 2312 9557. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2017, вип.* **22**

УДК 517.5

Б. Г. Пелешенко*, **Т. М. Семиренко****

* Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,
Дніпро, 49600.*E-mail: dsaupelesh@mail.ru*
** Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,
Дніпро, 49600.*E-mail: semirenkot@mail.ru*

Сліди узагальнених потенціалів

Одержана теорема про знаходження слідів інтегральних операторів, визначених на симетричних просторах з деяким ядром з застосуванням теореми інтерполяції Крейна-Семенова.

Ключові слова: міра, функція розподілу, перестановка функції, симетричний простір, інтерполяція операторів.

Получена теорема о нахождении следов интегральных операторов, определенных на симметричных пространствах с некоторым ядром с применением теоремы интерполяции Крейна-Семенова.

Ключевые слова: мера, функция распределения, перестановка функции, симметричное пространство, интерполяция операторов.

The theorem on finding traces of integral operators defined on a symmetric space with a certain kernel is obtained using the Krein-Semenov interpolation theorem.

Key words: measure, distribution function, function permutation, symmetric space, operators interpolation.

Узагальнюються деякі результати статті Петре [1], який застосував інтерполяцію лінійних операторів в лебегових просторах для знаходження слідів потенціалів Ріса. В цій статті Петре показав, що теореми типу Адамса [2] про сліди потенціалів можна доводити використовуючи теорію інтерполяції. Замість інтерполяції Петре в роботі використовується теорема інтерполяції лінійних операторів Крейна, Семенова в симетричних просторах [3].

Нехай через $\bar{E}\,(0,\infty)$ позначається симетричний простір функцій, заданих на півпрямій $(0,\infty)$, з фундаментальною функцією $\phi_E(t)$, $0<t<\infty$ [3].

Через X позначимо простір з додатною мірою μ.

Для кожної вимірною за мірою μ на X функції f через

$$\mu_f(t) =: \mu\left\{x \in X : f(x) > t\right\} \quad (t>0)$$

позначається функція розподілу і через f^*_μ позначається незростаюча перестановка цієї функції, яка задана на $(0,\infty)$, тобто $f^*_\mu(s) =: inf\left\{t \in (0,\infty) : \mu_f(t) < s\right\}$. Далі, через $E(X)$ позначається симетричний простір вимірних за мірою μ на X функцій з скінченною нормою

$$\|f\|_{E(X)} := \left\|f^*_\mu\right\|_{\bar{E}(0,\infty)}.$$

© *Б. Г. ПЕЛЕШЕНКО, Т. М. СЕМИРЕНКО, 2017*

Для додатних вимірних за мірою Лебега на $(0,\infty)$ функцій $\chi(t)$, $\delta(t)$ через $E_{\chi,\delta}(0,\infty)$ позначимо простір вимірних за мірою μ на X функцій f таких, що норма $\left\|\chi(t)f_\mu^{**}\left(\delta(t)\right)\right\|_{\bar{E}(0,\infty)}$ скінченна. Тут $f_\mu^{**}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\mu^*(\tau)d\tau$ $(0<t<\infty)$.

Нехай X, Y - простори з відповідно додатними мірами μ і ν. Позначимо $L_p^X = L_p(X)$, $L_q^Y = L_q(Y)$, $E^X = E(X)$, $F^Y = F(Y)$ - відповідно простори Лебега та симетричні простори.

Симетричними просторами, заданими на X, Y, є простори Лоренця $\Lambda^X = \Lambda(X)$, Марцинкевича $M^Y = M(Y)$ відповідно з мірами ν, μ та нормами $\|f\|_{\Lambda(X)} := \left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{\Lambda}_\phi(0,\infty)}$, $\|f\|_{M(Y)} := \left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{M}_\psi(0,\infty)}$. Тут через ϕ, $\bar{\psi}$ позначені відповідно фундаментальні функції, задані на півосі $(0,\infty)$ просторів Лоренця $\bar{\Lambda}\phi(0,\infty)$ та Марцинкевича $\bar{M}_\psi(0,\infty)$.

Нехай через $\bar{E}'(0,\infty)$ позначається симетричний простір, асоційований до простору $\bar{E}(0,\infty)$. Позначимо через $E'(X)$ симетричний простір, асоційований до простору $E(X)$, такий, що $\|f\|_{E'(X)} := \left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{E}'(0,\infty)}$, де фундаментальна функція простору $\bar{E}'(0,\infty)$ позначається через $\phi_{\bar{E}'}(t)=\frac{t}{\phi_{\bar{E}}(t)}$.

Нехай через $L_p^X(G)$ та $L_q^Y(G)$ позначаються простори Лебега в випадку, коли G - симетричний простір, тобто простір всіх функцій $g(u)$ із значеннями в G і таких, що $\|g(u)\|_G \in L_p^X$ або $\|g(u)\|_G \in L_q^Y$ з відповідними нормами $\|g\|_{L_p^X(G)} = \|\|g(u)\|_G\|_{L_p^X}$ або $\|g\|_{L_q^Y(G)} = \|\|g(u)\|_G\|_{L_q^Y}$.

Розглянемо оператор $Tf(y)=\int\limits_X k(y,x)f(x)d\mu(x)$, де ядро k є (μ,ν) - вимірна функція і $(Tf)_\nu^{**}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty (Tf)_\nu^*(\tau)d\tau$.

Сформулюємо перше твердження.

Теорема 1. *Нехай*

$$k \in L_\infty^Y(E^X), k \in L_\infty^X(F^Y) \tag{0.1}$$

і показники розтягування фундаментальних функцій $\phi_{\bar{E}}$, $\phi_{\bar{F}}$ задовольняють нерівностям $0<\gamma_{\phi_{\bar{E}}} \le \delta_{\phi_{\bar{E}}} < 1$, $0<\gamma_{\phi_{\bar{F}}} \le \delta_{\phi_{\bar{F}}} < 1$.

Нехай G^X - такий симетричний простір з нормою $\|f\|_{G^X} := \left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{G}(0,\infty)}$, що для показників розтягування фундаментальної функції $\phi_{\bar{G}}$ простору $\bar{G}(0,\infty)$ виконується нерівність $\delta_{\phi_{\bar{E}'}} < \gamma_{\phi_{\bar{G}}} \le \delta_{\phi_{\bar{G}}} < 1$.

Тоді існує така стала $C>0$, що для всіх $f \in G^X$ виконується нерівність

$$\|(Tf)_\nu^{**}\|_{\bar{G}_{\nu,\delta}(0,\infty)} \le C\left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{G}(0,\infty)},$$

де $\chi(t)=\frac{\phi_E(t)}{t}$, $\delta(t)=\phi_F^{-1}(\phi_E(t))$.

Доведення. Нехай $f\in (E')^X$. Застосовуючи нерівність Гельдера для симетричних просторів [1], маємо $\left|\int\limits_X k(y,x)f(x)d\mu(x)\right| \le C\|k_y\|_{E^X}\|f\|_{(E')^X}$. Потім візьмемо

L_∞ - норму від лівої та правої частини нерівності та використаємо умову (0.1) теореми. Одержимо

$$\|(Tf)_\nu^{**}\|_{L_\infty(0,\infty)} \le \|(Tf)_\nu^{*}\|_{L_\infty(0,\infty)} = \|Tf\|_{L_\infty^Y} = \|\int\limits_X k(y,x)f(x)d\mu(x)\|_{L_\infty^Y} \le$$

$$\le C\,\|k_y\|_{E^X}\,\|f\|_{(E')^X} \le C\,\|f_\mu^*\|_{\bar{E}'(0,\infty)}.$$

Нехай $f \in L_\infty^X$. Далі застосуємо аналог нерівності Мінковського [3] до норми симетричного простору F^Y, маємо

$$\|\int\limits_X k(\cdot,x)f(x)d\mu(x)\|_{F^Y} \le C\int\limits_X \|k(\cdot,x)\|_{F^Y}\,|f(x)|d\mu(x).$$

Використовуючи нерівність $0 < \gamma_{\phi_{\bar{F}}} \le \delta_{\phi_{\bar{F}}} < 1$ для $\phi_{\bar{F}}$ і теорему 5.3 із [3], маємо

$$\sup_{0<t<\infty}(Tf)_\nu^{**}(t)\phi_{\bar{F}}(t) \le \|(Tf)_\nu^{*}\|_{\bar{F}(0,\infty)} = \|Tf\|_{F^Y} \le C\,\|k(\cdot,x)\|_{F^Y}\,\|f\|_{L_1^X} \le C\,\|f_\mu^*\|_{\bar{L}_1(0,\infty)}.$$

Застосовуючи інтерполяційну теорему Крейна і Семенова [3], одержуємо, що

$$\|(Tf)_\nu^{**}\|_{\bar{G}_{\gamma,\delta(0,\infty)}} \le C\,\|f_\mu^*\|_{\bar{G}(0,\infty)}.$$

Нехай $X = Y = \mathbb{R}^n$. Додатна міра μ на $\mathbb{R}^n$ є розмірності a, якщо для будь-якої кулі K_r радіуса r виконується нерівність

$$\mu(K_r) \le C(\mu)\,r^a,$$

а стала $C(\mu)$ залежить тільки від μ. Нехай $k(y,x) = \frac{1}{g(|x-y|)}$, де $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(0) = 0$, $0 < \gamma_g \le \delta_g < n$ і g зростає.

Для міри μ позначимо символом $G_E^g(\mu)$ простір функцій u, поданих у вигляді $u(y) = \int k(y,x)f(x)dx$, де функція $f \in E(\mu)$.

Покладемо $u_\nu^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t u_\nu^*(\tau)d\tau$. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $X = Y = \mathbb{R}^n$, μ є міра розмірності a, міра ν - розмірності b і показники розтягування фундаментальної функції g задовольняють нерівність $0 < \gamma_g \le \delta_g < a$. Нехай $\phi(t) = \frac{t}{g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)}$ для $t > 0$ і $\phi(0) = 0$, $\bar{G}(0,\infty)$ - такий симетричний простір, що для показників розтягування фундаментальної функції $\phi_{\bar{G}}$ цього простору виконуєтсья нерівність $\delta_\phi < \gamma_{\phi_{\bar{G}}} \le \delta_{\phi_{\bar{G}}} < 1$. Якщо $G^X = G(X)$ - симетричний простір і $\tilde{G}^Y = \tilde{G}(Y)$ - банаховий простір відповідно з нормами $\|f\|_{G^X} := \|f_\mu^*\|_{\bar{G}(0,\infty)}$ та $\|u\|_t ildeG^Y := \left\|g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)t^{-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right\|_{\bar{G}(0,\infty)}$, то існує така стала $C > 0$, що для всякої $f \in G^X$ виконується нерівність*

$$\left\|g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)t^{-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right\|_{\bar{G}(0,\infty)} \le C\,\|f_\mu^*(t)\|_{\bar{G}(0,\infty)}.$$

Доведення. Нехай μ - міра розмірності a, ν - міра розмірності b і коефіцієнти розтягування функції g задовольняють нерівність $0 < \gamma_g \le \delta_g < a$. Тоді $0 < \gamma_\phi \le \delta_\phi < 1$. Для кожного $x \in X$ позначимо через $\nu_{k_x}(\tau)$ функцію розподілу функції $k(y,x)$ по змінній y, тобто

$$\nu_{k_x}(\tau) =: \nu\left\{y \in Y : k(y,x) > \tau\right\} \quad (\tau > 0).$$

Через $k_x^*(s)$ позначається незростаюча перестановка $k(y,x)$ по змінній y:

$$k_x^*(s) =: \inf\left\{\tau \in (0,\infty) : \nu_{k_x}(\tau) < s\right\},$$

якщо змінна x фіксована. Аналогічно визначається функція розподілу $\mu_{k_y}(\tau)$ та незростаюча перестановка $k_y^*(h)$ функції $k(y,x)$ по змінній x, якщо змінна y фіксована.

Спочатку доведемо, що $k(x,y) = \frac{1}{g(|x-y|)}$ належить простору Марцинкевича M^X з нормою $\|k(\cdot,y)\|_{M(X)} := \left\|k_y^*\right\|_{\bar{M}_\phi(0,\infty)}$ і фундаментальною функцією $\bar{\phi}(\tau)$ простору $\bar{M}_\phi(0,\infty)$, еквівалентною функції $g\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right)$ для всякого y.

Для цього достатньо встановити, що $\mu\left\{x \in X : \frac{1}{g(|y-x|)} > \tau\right\} \le C(a)\left(g^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^a$. Із нерівності $\frac{1}{g(|y-x|)} > \tau$ маємо $|y-x| < g^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)$. Так як μ - міра розмірності a, то згідно визначення $\mu\left\{x \in X : \frac{1}{g(|y-x|)} > \tau\right\}$ не більше за $C(a)\left(g^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^a$, де стала $C(a)$ залежить тільки від a. Отже, незростаюча перестановка $k_y^*(\tau)$, яка задана на $(0,\infty)$, функції $k(x,y) = \frac{1}{g(|y-x|)}$ для всякого $y \in Y$ мажорується $\phi_1(t) = \left[g\left(\left(\frac{t}{C(a)}\right)^{\frac{1}{a}}\right)\right]^{-1}$. Враховуючи властивості функцій g, ϕ і теорему 5.3 з [3], одержуємо, що $k(y,\cdot) \in M^X$ з нормою $\|k(y,\cdot)\|_{M^X} := \left\|k_y^*\right\|_{\bar{M}_{[\phi_1]^{-1}}(0,\infty)}$, що є еквівалентною $\sup\limits_{\tau>0} k_y^{**}(\tau)\left[g\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right)\right]$ для кожного $y \in Y$, де $\bar{\phi}(\tau) = g\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right)$ - фундаментальна функція простору Марцинкевича $\bar{M}_\phi(0,\infty)$.

Аналогічно доводиться, що незростаюча перестановка $k_x^*(t)$, яка задана на $(0,\infty)$, для всякого $x \in X$ мажорується функцією $\psi_1(t) = \left[g\left(\left(\frac{t}{C(b)}\right)^{\frac{1}{b}}\right)\right]^{-1}$ і $k(\cdot,x) \in M^Y$. Норма $\|k(\cdot,x)\|_{M^Y} := \|k_x^*\|_{\bar{M}_{[\psi_1]^{-1}}(0,\infty)}$ для всякого $x \in X$ еквівалентна $\sup\limits_{\tau>0} k_x^{**}(\tau)\left[g\left(\tau^{\frac{1}{b}}\right)\right]$, де $\bar{\psi}(t) = g\left(t^{\frac{1}{b}}\right)$ - фундаментальна функція простору $\bar{M}_\psi(0,\infty)$.

Відмітимо, що двоїстим простором до простору Марцинкевича M^X, з мірою μ і з нормою $\|f\|_{M^X} := \left\|f_\mu^*\right\|)\bar{M}_\phi(0,\infty)$ та фундаментальною функцією $\bar{\phi}(\tau) = = g\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right)$ простору $\bar{M}_\phi(0,\infty)$ є простір Лоренця Λ^X з нормою $\|f\|_{\Lambda^X} := \left\|f_\mu^*\right\|_{\bar{\Lambda}_\phi(0,\infty)}$ і фундаментальною функцією $\phi(t) = \frac{t}{\bar{\phi}(t)}$ простору $\bar{\Lambda}_\phi(0,\infty)$. Крім того, $\delta(t)$, $\gamma(t)$ визначаються з умови $\frac{\phi(t)}{t} = \frac{1}{\bar{\psi}(\delta(t))}$, $\gamma(t) = \frac{\bar{\psi}(\delta(t))}{t}$ або з умови $\bar{\phi}(t) = \bar{\psi}(\delta(t))$, $\gamma(t) =$

$\frac{\bar{\psi}(\delta(t))}{t}$. Звідси маємо $\delta(t) = t^{\frac{b}{a}}$, $\gamma(t) = \frac{\bar{\phi}(t)}{t} = \frac{1}{t}g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)$ з врахуванням залежності $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ від t. Застосовуючи теорему 1 у випадку $E^X = M^X$, $F^Y = M^Y$, одержуємо нерівність $\left\|g\left(t^{\frac{1}{a}}\right)t^{-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right\|_{\bar{G}(0,\infty)} \leq C\left\|f^*\right\|_{\bar{G}(0,\infty)}$.

Наслідок. *Нехай* $X = Y = R^n$, μ *є міра розмірності* a, *міра* ν *- розмірності* b; $g(t) = t^{n-\alpha}$, *де* $0 < \alpha < n$. *Нехай* $L_p(0,\infty)$, *де* $p > 1$ *- простір Лебега і* $L_{q,p}(0,\infty)$ *- простір функцій* $h(t)$ *з нормою* $\|h\|_{L_{q,p}(0,\infty)} = \left\{q^{-2}(q-1)\int\limits_0^\infty [h^{**}(t)]^p\, t^{\frac{p}{q}-1}dt\right\}^{\frac{1}{p}}$. *Якщо* $L_p^X = L_p(X)$ *та* $L_{q,p}^Y = L_{q,p}(Y)$ *- простори відповідно з нормами* $\|f\|_{L_p^X} :=$ $:= \left\|f_\mu^*\right\|_{L_p(0,\infty)}$ *та* $\|u\|_{L_{q,p}^Y} := \|u_\nu^*\|_{L_{q,p(0,\infty)}}$, *і* $n - \alpha = \frac{a}{p'} + \frac{b}{q}$ $(p' = \frac{p}{p-1})$, *то існує така стала* $C > 0$, *що для всякої* $f \in L_p^X$ *виконується нерівність*

$$\|u_\nu^*\|_{L_{q,p(0,\infty)}} \leq C\left\|f_\mu^*(t)\right\|_{L_p(0,\infty)}.$$

Доведення. Застосовуючи теорему 2 в випадку, коли $G^Y = L_p^Y$, маємо нерівність:

$$\left\|t^{\frac{n-\alpha}{a}}t^{-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right\|_{L_p(0,\infty)} \leq C\left\|f^*\right\|_{L_p(0,\infty)}.$$

Спочатку в лівій частині цієї нерівності запишемо норму в $L_p(0,\infty)$:

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{n-\alpha}{a}-1}(u)^{**}\left(t^{\frac{b}{a}}\right)\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|f^*\right\|_{L_p(0,\infty)}.$$

Потім зробимо заміну $t^{\frac{b}{a}} = \tau$ і маємо:

$$\left\{\frac{a}{b}\int\limits_0^\infty ((u)^{**}(\tau))^p\, \tau^{\frac{n-\alpha}{b}p-\frac{a}{b}p}\tau^{\frac{a}{b}-1}d\tau\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|f^*\right\|_{L_p(0,\infty)}.$$

Замінивши $\frac{1}{q} = \frac{n-\alpha}{b} - \frac{a}{bp'}$, одержимо наслідок.

Бібліографічні посилання

1. *Peetre J.* On the trace of potentials [Text] /J. Peetre //Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa —1975. —№2. —P. 33-43.
2. *Adams D. R.* Traces of potentials arising from translation invariant operators [Text] /D. R. Adams //Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa —1971. —№25. —P. 203-217.
3. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейных операторов [Текст]/ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. - М.: Наука, 1978.– 400 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2017