*Вiсник Днiпровського унiверситету. Серiя Математика* https://vestnmath.dnu.dp.ua
Vìsn. Dnìpro unìv., Ser. Mat. **26** (2018) p. 25–36 ISSN (Print) 2312-9557
doi:10.15421/241804 ISSN (Online) 2518-7996

УДК 517.5

**В. В. Каменева***, **В. А. Кофанов****

* Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49050. *E-mail: vlada-kameneva@i.ua*
** Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

# Задача Боянова-Найденова для положительных (отрицательных) частей дифференцируемых функций на оси

**Решена экстремальная задача $\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \to \sup$, $k = 0, 1, ..., r-1$, на множестве пар $(x, I)$ функций $x \in W_{\infty}^r(\mathbf{R})$ и отрезков $I = [a,b]$ с ограничениями на локальную норму функции $x$ и меру носителя $\mu\{\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\}$.**

*Ключевые слова: Задача Боянова-Найденова, положительная (отрицательная) часть функции, перестановка, теорема сравнения.*

**Розв'язана екстремальна задача $\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \to \sup$, $k = 0, 1, ..., r-1$, на множинi пар $(x, I)$ функцiй $x \in W_{\infty}^r(\mathbf{R})$ та вiдрiзкiв $I = [a,b]$ з обмеженнями на локальну норму функцiї $x$ та мiру носiя $\mu\{\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\}$.**

*Ключовi слова: Задача Боянова-Найденова, додатна (вiд'ємна) частина функцiї, перестановка, теорема порiвняння.*

**We solve the extremal problem $\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \to \sup$, $k = 0, 1, ..., r-1$, over the set of pair $(x, I)$ of functions $x \in W_{\infty}^r(\mathbf{R})$ and intervals $I = [a,b]$ with restrictions on the local norm of function $x$ and the measure of support $\mu\{\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\}$.**

*Key words: Bojanov-Naidenov problem, positive (negative) part of function, rearrangement, comparison theorem.*

**MSC2010**: Pri 26D10, Sec 46E30

**1. Введение**. Будем рассматривать пространства $L_p$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, таких что $\|x\|_p < \infty$, где

$$\|x\|_p := \left( \int_{\mathbf{R}} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|x\|_p := \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \mathbf{R}} |x(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

Для $r \in \mathbf{N}$ и $p, s \in (0, \infty]$ через $L_{p,s}^r$ обозначим пространство всех функций $x \in L_p$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, причем $x^{(r)} \in L_s$. Будем писать $L_{\infty}^r$ вместо $L_{\infty,\infty}^r$.

 

Хорошо известно (см., например [6, стр. 47]), что задача нахождения точной константы $C$ в неравенстве типа Колмогорова-Надя

$$\|x^{(k)}\|_q \le C \,\|x\|_p^{\alpha} \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметры $q, p, s \ge 1$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N}\bigcup\{0\}$, $k < r$, удовлетворяют условию $\alpha \le (r-k)/r$, равносильна следующей экстремальной задаче

$$\|x^{(k)}\|_q \to \sup \tag{1.2}$$

на классе функций $x \in L^r_{p,s}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_s \le A_r, \quad \|x\|_p \le A_0, \tag{1.3}$$

где $A_0$, $A_r$ – заданные положительные числа.

Настоящей тематике посвящено большое количество работ (подробную библиографию можно найти в работах [6] – [3]), но точная константа $C$ в неравенстве (1.1) известна для всех $r \in \mathbf{N}$ и всех $k < r$ лишь в немногих случаях. Поэтому представляет интерес следующая модификация задачи (1.2) с ограничениями (1.3), рассмотренная Бояновым и Найденовым [4]. Для произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ими решена проблема

$$\int_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad k = 1, ...r-1,$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.3) с $p = s = \infty$, где $\Phi$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[0, \infty)$, положительная на $(0, \infty)$, такая что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$.

Через $W$ обозначим класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций $\Phi$, определенных на $[0, \infty)$, таких что $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ положим [2]

$$L(x)_p := \sup\left\{ \left( \int_a^b |x\,(t)|^p \,dt \right)^{\frac{1}{p}} : \ a, b \in \mathbf{R}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a, b) \right\}. \tag{1.4}$$

Отметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ и $L(x')_1 \le 2\|x\|_\infty$.

В работе [6] решена следующая модификация задачи Боянова и Найденова:

$$\int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{1.5}$$

на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p \le A_0, \tag{1.6}$$

Как следствие получено решение задачи

$$\int_a^b \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, ..., r-1, \tag{1.7}$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям (1.6).

Символом $\varphi_r(t)$ обозначим $r$-й $2\pi$-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) := \operatorname{sign}\sin t$ и положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

В настоящей работе найдены точные верхние грани (теоремы 1 – 2)

$$\int_a^b \Phi(x^p_\pm(t))dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0,$$

и

$$\int_a^b \Phi(x^{(k)}_\pm(t))dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, ..., r-1,$$

на классе пар $(x, I)$ функций $x \in L^r_\infty$ и отрезков $I = [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x^{(r)}(t)| \le 1$ для почти всех $t \in \mathbf{R}$, для которых при некотором $\lambda > 0$ выполнено неравенство $L(x)_p \le L(\varphi_{\lambda,r})_p$ и соответствующее требование

$$\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]}x_\pm\right) \le \mu, \quad \mu > 0,$$

или

$$\mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]}x^{(k)}_\pm\right) \le \mu, \quad \mu > 0,$$

где $\operatorname{supp}_{[a,b]}x := \{t \in [a, b] : |x(t)| > 0\}$.

**2. Вспомогательные утверждения**. Для $r \in \mathbf{N}$ положим

$$W^r_\infty := \left\{x \in L^r_\infty : \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le 1\right\}.$$

**Лемма 1.** [6]. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$. Если для функции $x \in W^r_\infty$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что*

$$L(x)_p \le L\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_p,$$

*где величина $L(x)_p$ определена равенством (1.4), то*

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

**Лемма 2.** [10]. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p > 0$. Если для функции $x \in W^r_\infty$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что*

$$L(x)_p \le L\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_p,$$

*то для любого $q \ge 1$*

$$L(x^{(k)})_q \le L\left(\varphi_{\lambda,r-k}\right)_q.$$

**Следствие 1.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$. Если функция $x \in W^r_\infty$ удовлетворяет условию $L(x)_p < \infty$ с некоторым $p > 0$ и $|x(t)| > 0$ для $t \in (a, b)$, причем $a = -\infty$ или $b = +\infty$, то $x(t) \to 0$, если $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$.*

*В условиях следствия 1 будем полагать $x(-\infty) = 0$ или $x(+\infty) = 0$.*

Для суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции $x$ символом $r(x, t)$ обозначим перестановку функции $|x|$ (см., например, [4, §1.3]). При этом условимся, что $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

**Лемма 3.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p > 0$ и для функции $x \in W^r_\infty$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что выполнено требование*

$$L(x)_p \leq L\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_p, \tag{2.1}$$

*где величина $L(x)_p$ определена равенством* (1.4).

*Если интервал (конечный или бесконечный) $(a_\pm, b_\pm) \subset \mathbf{R}$ и отрезок $[A_\pm, B_\pm] \subset \mathbf{R}$ таковы, что*

$$x_\pm(a_\pm) = x_\pm(b_\pm) = 0, \quad x_\pm(t) > 0, \quad t \in (a_\pm, b_\pm), \tag{2.2}$$

*и*

$$\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_\pm(A_\pm) = \left(\varphi_{\lambda,r}\right)_\pm(B_\pm) = 0, \;\; \left(\varphi_{\lambda,r}\right)_\pm(t) > 0, \;\; t \in (A_\pm, B_\pm), \tag{2.3}$$

*то для любого $\xi > 0$ и любой функции $\Phi \in W$ выполнены неравенства*

$$\int_{a_\pm}^{a_\pm+\xi} \Phi\left(\overline{x}^p_\pm(t)\right) dt \leq \int_{A_\pm}^{A_\pm+\xi} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right) dt \tag{2.4}$$

*и*

$$\int_{b_\pm-\xi}^{b_\pm} \Phi\left(\overline{x}^p_\pm(t)\right) dt \leq \int_{B_\pm-\xi}^{B_\pm} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right) dt, \tag{2.5}$$

*где $\overline{x}_\pm$ — сужение функции $x_\pm$ на $(a_\pm, b_\pm)$, а $\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_\pm$ — сужение $\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_\pm$ на $[A_\pm, B_\pm]$, причем за пределами этих промежутков мы полагаем функции $\overline{x}_\pm$ и $\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_\pm$ равными нулю.*

*Кроме того, если*

$$b_\pm - a_\pm \leq B_\pm - A_\pm, \tag{2.6}$$

*то для любого отрезка $[\alpha_\pm, \beta_\pm] \subset [A_\pm, B_\pm]$, для которого*

$$\beta_\pm - \alpha_\pm = b_\pm - a_\pm, \tag{2.7}$$

*имеет место неравенство*

$$\int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi\left(x^p_\pm(t)\right) dt \leq \int_{\alpha_\pm}^{\beta_\pm} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)^p_\pm(t)\right) dt, \quad \Phi \in W. \tag{2.8}$$

**Доказательство**. Зафиксируем функцию $x$ и промежутки $(a_\pm, b_\pm)$ и $[A_\pm, B_\pm]$, удовлетворяющие условиям леммы 3. Докажем неравенство (2.4). Неравенство (2.5) доказывается аналогично.

Сначала докажем неравенство

$$\int_0^\xi r^p(\overline{x}_\pm, t) dt \leq \int_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_\pm, t) dt, \quad \xi > 0, \tag{2.9}$$

где для краткости положено $\overline{\varphi}_\pm := \left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_\pm$. Убедимся прежде всего в том, что разность $\delta_\pm(t) := r(\overline{x}_\pm, t) - r(\overline{\varphi}_\pm, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Чтобы доказать этот факт заметим, во-первых, что

$$\delta_\pm(0) \le \|x_\pm\|_\infty - \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \le 0 \tag{2.10}$$

в силу леммы 1. Ввиду этого неравенства и соотношений (2.2) и (2.3) для любого $z_\pm \in (0, \|\overline{x}_\pm\|_\infty)$ существуют такие точки

$$t_i^\pm \in (a_\pm, b_\pm),\ i = 1, ..., m,\ m \ge 2, \quad y_j^\pm \in (A_\pm, B_\pm),\ j = 1, 2,$$

что

$$z_\pm = \overline{x}_\pm(t_i^\pm) = \overline{\varphi}_\pm(y_j^\pm). \tag{2.11}$$

В силу включения $x \in W_\infty^r$ и неравенства (2.10) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [5] (см. также [6, стр. 96]). Согласно этой теореме для точек $t_i^\pm$ и $y_j^\pm$, удовлетворяющих условиям (2.11), выполнены неравенства

$$|\overline{x}'_\pm(t_i^\pm)| \le |\overline{\varphi}'_\pm(y_j^\pm)|. \tag{2.12}$$

Поэтому, если точки $\theta_1^\pm, \theta_2^\pm > 0$ выбраны так, что

$$z_\pm = r(\overline{x}_\pm, \theta_1^\pm) = r(\overline{\varphi}_\pm, \theta_2^\pm),$$

то по теореме о производной перестановки (см., например, [4, предложение 1.3.2]) с учетом неравенства (2.12) получим

$$|r'(\overline{x}_\pm, \theta_1^\pm)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{x}'_\pm(t_i^\pm)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'_\pm(y_j^\pm)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}_\pm, \theta_2^\pm)|.$$

Отсюда ввиду (2.10) следует, что разность $\delta^\pm(t) := r(\overline{x}_\pm, t) - r(\overline{\varphi}_\pm, t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое верно и для разности

$$\delta_p^\pm(t) := r^p(\overline{x}_\pm, t) - r^p(\overline{\varphi}_\pm, t).$$

Рассмотрим интеграл

$$I_p^\pm(\xi) := \int_0^\xi \delta_p^\pm(t)dt, \quad \xi \ge 0.$$

Ясно, что $I_p^\pm(0) = 0$ и в силу условия (2.1) для $\xi \ge \max\{b_\pm - a_\pm, B_\pm - A_\pm\}$ имеем

$$I_p^\pm(\xi) \le L(x_\pm)_p - L\left((\varphi_{\lambda,r})_\pm\right)_p \le 0.$$

Кроме того, производная $(I_p^\pm)'(t) = \delta^\pm(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Следовательно, $I_p^\pm(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$. Неравенство

(2.9) доказано. Из него в силу теоремы Харди-Литлвуда-Полиа (см., например, [4, теорема 1.3.11]) следует, что

$$\int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi\left(\overline{x}_\pm^p(t)\right) dt \le \int_{A_\pm}^{B_\pm} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_\pm^p(t)\right) dt, \quad \Phi \in W. \tag{2.13}$$

Докажем теперь неравенство (2.4). Переходя к сдвигам функций $\overline{x}$ и $\overline{\varphi}_{\lambda,r}$, можем считать, что

$$a_\pm = A_\pm = 0. \tag{2.14}$$

Тогда из теоремы сравнения Колмогорова вытекает, что разность $\Delta^\pm(t) := \overline{x}_\pm(t) - \overline{\varphi}_\pm(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Ввиду монотонного возрастания функций $f(t) = t^p$ и $\Phi \in W$ то же самое верно и для разности

$$\Delta_\Phi^\pm(t) := \Phi\left(\overline{x}_\pm^p(t)\right) - \Phi\left(\overline{\varphi}_\pm^p(t)\right), \quad t > 0.$$

Положим

$$I_\Phi^\pm(\xi) := \int_0^\xi \Delta_\Phi^\pm(t)dt, \quad \xi \ge 0.$$

Ясно, что $I_\Phi^\pm(0) = 0$. Учитывая также неравенство (2.13), имеем

$$I_\Phi^\pm(\xi) \le \int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi\left(\overline{x}_\pm^p(t)\right) dt - \int_{A_\pm}^{B_\pm} \Phi\left(\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_\pm^p(t)\right) dt \le 0$$

для $\xi \ge \max\{b_\pm - a_\pm, B_\pm - A_\pm\}$. Кроме того, производная $(I_\Phi^\pm)'(t) = \Delta_\Phi^\pm(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Следовательно, $I_\Phi^\pm(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$, что равносильно неравенству (2.4).

Осталось доказать неравенство (2.8) при выполнении условий (2.6) и (2.7). Пусть последние два условия выполнены. Тогда переходя, если нужно, к сдвигу функции $x$, можно считать, что

$$a_\pm = \alpha_\pm, \;\; b_\pm = \beta_\pm. \tag{2.15}$$

Тогда из теоремы сравнения Колмогорова (ее условия, как было отмечено, выполнены) вытекают неравенства

$$x_\pm(t) \le \left(\varphi_{\lambda,r}\right)_\pm(t), \quad t \in [a_\pm, b_\pm].$$

Отсюда ввиду предположения (2.15) следует доказываемое неравенство (2.8).

Лемма 3 доказана.

В ходе доказательства леммы 3 было получено неравенство (2.13). Таким образом, имеет место следствие.

**Следствие 2.** *В условиях леммы 3 для любой функции $\Phi \in W$ имеет место неравенство*

$$\int_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} \Phi\left(x_{\pm}^{p}(t)\right) dt \leq \int_{A_{\pm}}^{B_{\pm}} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt = \int_{0}^{2\pi/\lambda} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt. \tag{2.16}$$

**Лемма 4.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p > 0$ и для функции $x \in W_{\infty}^{r}$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что выполнено требование*

$$L(x)_{p} \leq L\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{p}, \tag{2.17}$$

*где величина $L(x)_p$ определена равенством (1.4). Если отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$ удовлетворяет одному из условий*

$$\delta_{\pm} := \mu\left(\operatorname{supp}_{[a,b]} x_{\pm}\right) \leq \frac{\pi}{\lambda} \tag{2.18}$$

*то для любой функции $\Phi \in W$ имеет место соответствующее неравенство*

$$\int_{a}^{b} \Phi\left(x_{\pm}^{p}(t)\right) dt \leq \int_{m^{\pm}-\Theta^{\pm}}^{m^{\pm}+\Theta^{\pm}} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm}^{p}(t)\right) dt, \tag{2.19}$$

*где $m^{\pm}$ – точки локального максимума функции $(\varphi_{\lambda,r})_{\pm}$, а числа $\Theta^{\pm} > 0$ таковы, что*

$$\varphi_{\lambda,r}(m^{\pm} - \Theta^{\pm}) = \varphi_{\lambda,r}(m^{\pm} + \Theta^{\pm}), \tag{2.20}$$

*причем*

$$2\Theta^{\pm} = \delta_{\pm}. \tag{2.21}$$

**Доказательство**. Зафиксируем функцию $x \in W_{\infty}^{r}$, удовлетворяющую условиям леммы 4. Докажем неравенство (2.19) для $x_{+}$ ( для $x_{-}$ доказательство аналогично). Пусть отрезок $[a,b]$ удовлетворяет соответствующему условию (2.18). Будем считать, что

$$x_{+}(a) > 0, \quad x_{+}(b) > 0 \tag{2.22}$$

(если хотя бы одно из этих неравенств не выполняется доказательство неравенства (2.19) только упрощается).

Если функция $x$ не имеет нулей на $(a,b)$, то согласно следствию 1 существует такой интервал $(c,d)$ (конечный или бесконечный), что $(a,b) \subset (c,d)$, причем

$$x_{+}(c) = x_{+}(d) = 0, \quad x_{+}(t) > 0, \quad t \in (c,d).$$

Через $\overline{x}_{+}$ обозначим сужение $x_{+}$ на $(c,d)$, а через $\overline{\varphi}_{+}-$ сужение $(\varphi_{\lambda,r})_{+}$ на $[0, 2\pi/\lambda]$. Повторяя рассуждения из доказательства неравенства (2.9) леммы 3, получим

$$\int_{0}^{\xi} r^{p}(\overline{x}_{+}, t) dt \leq \int_{0}^{\xi} r^{p}(\overline{\varphi}_{+}, t) dt, \quad \xi > 0.$$

Ясно, что это неравенство сохраняет силу и для сужения $x_+$ на $(a,b)$. В дальнейшем рассуждении для рассматриваемого случая ($x$ не имеет нулей на $(a,b)$) под символом $\overline{x}_+$ будем понимать именно такое сужение. Из этого неравенства в силу теоремы Харди-Литлвуда-Полиа (см., например, [4, теорема 1.3.11]) следует, что

$$\int_0^\xi \Phi\left(r^p(\overline{x}_+,t)\right)dt \le \int_0^\xi \Phi\left(r^p(\overline{\varphi}_+,t)\right)dt, \quad \Phi\in W, \quad \xi>0.$$

Поэтому

$$\int_a^b \Phi\left((\overline{x}_+^p(t)\right)dt = \int_0^{b-a} \Phi\left(r^p(\overline{x}_+,t)\right)dt \le \int_0^{b-a} \Phi\left(r^p(\overline{\varphi}_+(t)\right)dt.$$

Теперь доказываемое неравенство (2.19) в случае, когда $x$ не имеет нулей на $(a,b)$ следует из очевидного равенства

$$\int_0^{b-a} \Phi\left(r^p(\overline{\varphi}_+(t)\right)dt = \int_{m^+-\Theta^+}^{m^++\Theta^+} \Phi\left((\varphi_{\lambda,r})_+^p(t)\right)dt.$$

Пусть теперь $x$ имеет нули на $(a,b)$. Положим

$$a' := \inf\{t\in(a,b):\ x_+(t)=0\}, \quad b' := \sup\{t\in(a,b):\ x_+(t)=0\}.$$

Тогда ввиду (2.22) носитель $\mathrm{supp}_{[a,b]}x_+$ имеет вид

$$\mathrm{supp}_{[a,b]}x_+ = (a,a')\bigcup(b',b)\bigcup\bigcup_k(a_k,b_k), \tag{2.23}$$

где $(a_k,b_k)\subset(a',b')$, причем

$$x_+(a_k)=x_+(b_k)=0, \quad x_+(t)>0, \quad t\in(a_k,b_k)$$

(не исключено, что множество таких интервалов $(a_k,b_k)$ пусто). Ввиду соотношения (2.18), предположения (2.22) и определения чисел $a'$ и $b'$, имеем

$$\delta_+ = (a'-a)+(b-b')+\sum_k(b_k-a_k) \le \frac{\pi}{\lambda}. \tag{2.24}$$

Пусть $A_+$ и $B_+$– два соседних нуля сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, причем $(\varphi_{\lambda,r})_+(t)>0$ для $t\in(A_+,B_+)$. В силу следствия 1 существуют интервалы $(\alpha',a')$, $(b',\beta')$ (конечные или бесконечные), для которых

$$x_+(\alpha')=x_+(a')=0, \quad x_+(t)>0, \quad t\in(\alpha',a')$$

и

$$x_+(b')=x_+(\beta')=0, \quad x_+(t)>0, \quad t\in(b',\beta').$$

Применяя к интервалам $(\alpha', a')$, $(b', \beta')$ и отрезку $[A_+, B_+]$ неравенства (2.4) и (2.5) леммы 3, получим

$$\int_{b'}^{b} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le \int_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt, \quad \xi = b - b', \tag{2.25}$$

и

$$\int_{a}^{a'} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le \int_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt, \quad \eta = a' - a, \tag{2.26}$$

(ввиду (2.24) вместо $\overline{x}_+$ в неравенстве (2.4) можно написать $x_+$, а вместо $\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}\right)_+$ – $\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+$.) В силу (2.24) существуют такие попарно непересекающиеся интервалы $(\alpha_k, \beta_k)$, что $(\alpha_k, \beta_k) \subset (A_+ + \xi,\ B_+ - \eta)$ и $\beta_k - \alpha_k = b_k - a_k$. Для них в силу соотношения (2.8) леммы 3 выполнено неравенство

$$\int_{a_k}^{b_k} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt. \tag{2.27}$$

Суммируя оценки (2.25) – (2.27) и учитывая (2.23), имеем

$$\int_{a}^{b} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt = \int_{a}^{a'} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt + \int_{b'}^{b} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt + \sum_k \int_{a_k}^{b_k} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le$$

$$\int_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt + \int_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt + \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt.$$

Так как $\beta_k - \alpha_k = b_k - a_k$, то ввиду (2.24) $\xi + \eta + \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = \delta_+$. Поэтому сумма интегралов в правой части полученной оценки не превосходит

$$\int_{0}^{\delta_+} r\left(\Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p, t\right)\right) dt = \int_{m^+ - \Theta^+}^{m^+ + \Theta^+} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p(t)\right) dt.$$

Неравенство (2.19) доказано.

Лемма 4 доказана.

**Следствие 3.** *В предположениях леммы* 4 *при выполнении одного из условий* $\mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}\right) \le \pi/\lambda$ *имеет место соответствующее неравенство*

$$\int_{a}^{b} \Phi\left(x_{\pm}^p(t)\right) dt \le \int_{0}^{2\pi/\lambda} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm}^p(t)\right) dt. \tag{2.28}$$

**3. Основные результаты**. Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p,\ \lambda, \mu > 0$. Положим

$$L_r(p,\ \lambda) := \left\{x \in W_\infty^r : L(x)_p \le L\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_p\right\} \tag{3.1}$$

и определим класс пар $(x, I)$ функций $x$ и отрезков $I = [a, b]$

$$L_r^{\pm}(p,\ \lambda,\ \mu) := \left\{(x, I) : x \in L_r(p,\ \lambda),\ \ \mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}\right) \le \mu\right\}. \tag{3.2}$$

Представим число $\mu$ в виде

$$\mu = n \cdot \frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}, \quad \Theta \in [0,\ \pi/(2\lambda)). \tag{3.3}$$

Заметим, что если числа $\tau^{\pm} \in \mathbf{R}$ и отрезки $[A, B]$ таковы, что

$$B - A = n \cdot \frac{2\pi}{\lambda} + 2\Theta, \tag{3.4}$$

$$\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm} (A + \Theta + \tau^{\pm}) = \left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm} (B - \Theta + \tau^{\pm}) = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{\infty}\,, \tag{3.5}$$

то $(\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau^{\pm}),\ [A,\ B]) \in L_r^{\pm}(p,\ \lambda,\ \mu)$ .

**Теорема 1.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p, \lambda, \mu > 0$. Для произвольной функции $\Phi \in W$*

$$\sup \left\{ \int_a^b \Phi\left(x_{\pm}^p(t)\right) dt : (x, [a, b]) \in L_r^{\pm}(p,\ \lambda,\ \mu) \right\} = \int_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_{\pm}^p (t + \tau^{\pm})\right) dt,$$

*где множество $L_r^{\pm}(p,\ \lambda,\ \mu)$, числа $\tau^{\pm}$ и отрезок $[A, B]$ определены в* (3.1) – (3.5).

**Доказательство**. Зафиксируем пару $(x, [a, b]) \in L_r^{\pm}(p,\ \lambda,\ \mu)$. Докажем теорему для $x_+$. Для $x_-$ доказательство аналогично. Сначала докажем неравенство

$$I := \int_a^b \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le \int_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p (t + \tau^+)\right) dt := I(\mu). \qquad (3.6).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathrm{supp}_{[a,\,b]} x_+ = \mu$. Так как для $\mu$ справедливо равенство (3.4), то отрезок $[a, b]$ представим в виде

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k] \bigcup [\alpha, \beta],$$

причем интервалы $(\alpha_k, \beta_k)$, $(\alpha, \beta)$ попарно не пересекаются и

$$\mu(\mathrm{supp}_{[\alpha_k,\beta_k]} x_+) = \frac{\pi}{\lambda}\,, \quad \mu(\mathrm{supp}_{[\alpha,\beta]} x_+) = 2\Theta.$$

Тогда

$$\int_a^b \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{n}\ \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt.$$

Применяя для оценки интегралов в правой части последнего равенства неравенство (2.28) следствия 3 леммы 4 и неравенство (2.19) леммы 4, получим

$$\int_a^b \Phi\left(x_+^p(t)\right) dt \le n \int_0^{2\pi/\lambda} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p (t)\right) dt +$$

$$+ \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p (t)\right) dt = \int_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r}\right)_+^p (t + \tau^+)\right) dt,$$

где $m-$ точка максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а последнее равенство в полученной оценке вытекает из (3.4) и (3.5). Тем самым неравенство (3.6) доказано в случае, когда $\mathrm{supp}_{[a,\,b]}x_+ = \mu$.

Пусть теперь $\mu_1 := \mathrm{supp}_{[a,\,b]}x_+ < \mu$. Заметим, что число $\mu$ однозначно представимо в виде (3.4) и, следовательно, этим числом однозначно (с точностью до сдвига) определяются отрезок $[A,B]$ и число $\tau^+$. Поэтому интеграл $I(\mu)$ в правой части (3.7) однозначно определяется числом $\mu$. При этом, очевидно, что $I(\mu)$ строго возрастает как функция от $\mu$. Следовательно, повторив рассуждения из предыдущего случая, для интеграла $I$ в левой части (3.6) получим оценку

$$I \le I(\mu_1) < I(\mu).$$

Таким образом, неравенство (3.6) полностью доказано. Осталось заметить, что для функции $x(\cdot) = \varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau^+)$ и отрезка $[A,B]$, которые определены соотношениями (3.4) – (3.5), неравенство (3.6) обращается в равенство.

Теорема 1 доказана.

Пусть $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p,\,\lambda,\,\mu > 0$. Рассмотрим класс $L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu)$ пар $(x,I)$ функций $x$ и отрезков $I=[a,b]$, определяемых соотношеним

$$L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu) := \left\{(x,I) : x \in L_r(p,\,\lambda),\;\; \mu\left(\mathrm{supp}_{[a,b]}x^{(k)}_{\pm}\right) \le \mu\right\}. \tag{3.7}$$

Представим число $\mu$ в виде

$$\mu = n\cdot\frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \quad \Theta \in (0,\;\pi/(2\lambda)). \tag{3.8}$$

Выберем далее числа $\tau^{\pm} \in \mathbf{R}$ и отрезок $[A,\;B]$ так, чтобы

$$B - A = n\cdot\frac{2\pi}{\lambda} + 2\Theta, \tag{3.9}$$

$$\left(\varphi_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}\left(A + \Theta + \tau^{\pm}\right) = \left(\varphi_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}\left(B - \Theta + \tau^{\pm}\right) = \left\|\varphi_{\lambda,r-k}\right\|_{\infty}. \tag{3.10}$$

Тогда $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau^{\pm}) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu)$.

**Теорема 2.** *Пусть $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$; $p,\,\lambda,\mu > 0$. Для любой функции $\Phi \in W$*

$$\sup\left\{\int_a^b \Phi\left(x^{(k)}_{\pm}(t)\right)dt : (x,[a,b]) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu)\right\} = \int_A^B \Phi\left(\left(\varphi_{\lambda,r-k}\right)_{\pm}\left(t+\tau^{\pm}\right)\right)dt,$$

*где множества $L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu)$, числа $\tau^{\pm}$ и отрезок $[A,B]$ определены в* (3.1) *и* (3.7) *–* (3.10).

**Доказательство**. В силу леммы 2, если $x \in L_r(p,\,\lambda)$, то $x^{(k)} \in L_{r-k}(1,\,\lambda)$. Следовательно, если $(x,[a,b]) \in L^{\pm}_{r,k}(p,\,\lambda,\,\mu)$, то $(x^{(k)},[a,b]) \in L^{\pm}_{r-k}(1,\,\lambda,\,\mu)$ Поэтому, применяя теорему 1 к классу $L^{\pm}_{r-k}(1,\,\lambda,\,\mu)$, получим утверждение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в теореме 1 и $\Phi(t) = t^q$ в теореме 2, получаем следствие.

**Следствие 4.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$*;* $p,\ \lambda,\ \mu > 0$*. Тогда для любого* $q \geq p$

$$\sup\left\{\int_a^b x_\pm^q(t)dt : x \in L_r^\pm(p,\ \lambda,\ \mu)\right\} = \int_A^B (\varphi_{\lambda,r})_\pm^q\,(t+\tau^\pm)dt,$$

*где множество* $L_r^\pm(p,\ \lambda,\ \mu)$*, числа* $\tau^\pm$ *и отрезок* $[A,B]$ *определены в* (3.1) – (3.5).

*Кроме того, для любого* $k \in \mathbf{N}$*,* $k < r$*, и произвольного* $q \geq 1$

$$\sup\left\{\int_a^b \left(x_\pm^{(k)}(t)\right)^q dt : (x,[a,b]) \in L_{r,k}^\pm(p,\ \lambda,\ \mu)\right\} = \int_A^{\ B} \left((\varphi_{\lambda,r-k})_\pm^q\,(t+\tau^\pm)\right)dt,$$

*где множества* $L_{r,k}^\pm(p,\ \lambda,\ \mu)$*, числа* $\tau^\pm$ *и отрезок* $[A,B]$ *определены в* (3.7) – (3.10).

## Библиографические ссылки


1. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для производных и их приложения [Текст]/ Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// К.: Наукова думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям [Текст]/ В. Ф. Бабенко// Укр. мат. журн. – 2000. – 52, 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences [Text] / M. K. Kwong, A. Zettl [Text]// Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 150 p. (Lecture Notes in Math. – V. 1536).
4. *Bojanov B.* An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos [Text] / B. Bojanov, N. Naidenov// Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – 78. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A.* Shisha O., Variations on the Chebyshev and $L^q$ Theories of Best Approximation [Text] / A. Pinkus, O. Shisha// Journal of Approximation Theory. – 1982. – 35, 2. – P. 148-168.
6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси [Текст] / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, 6. – С. 765 – 776.
7. *Kofanov V. A.* Some extremal problems various metrics and sharp inequalities of Nagy-Kolmogorov type [Text] / V. A. Kofanov// East. J. Approxim. – 2010. – 16, 4. – C. 313 – 334.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун// К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.
9. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале [Текст] / А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – 470 с.– С. 252–263.


*Received*: 17.02.2018. *Accepted:* 20.06.2018