Вісник Дніпровського університету. Серія Математика `https://vestnmath.dnu.dp.ua`
Vìsn. Dnìpro unìv., Ser. Mat. **26** (2018) p. 48–55 ISSN (Print) 2312-9557
`doi:10.15421/241806` ISSN (Online) 2518-7996

УДК 517.5

В. А. Кофанов*

* Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара,
Днепр, 49115. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

Неравенства разных метрик для норм дифференцируемых функций на оси.

Доказаны точные неравенства разных метрик для норм $\|x\|_{p,\,\delta}$ дифференцируемых функций на оси, тригонометрических полиномов и периодических сплайнов.

Ключевые слова: неравенства разных метрик, тригонометрические полиномы, сплайны.

Доведені точні нерівності різних метрик для норм $\|x\|_{p,\,\delta}$ диференційовних функцій на осі, тригонометричних поліномів та періодичних сплайнів.

Ключові слова: нерівності різних метрик, тригонометричні поліноми, сплайни.

We prove sharp inequalities of various metrics for the norms $\|x\|_{p,\,\delta}$ of differentiable functions defined on the real line, trigonometric polynomials and periodic splines.

Key words: Inequalities of various metrics, trigonometric polynomials, splines.

MSC2010: Pri 26D10, Sec 46E30, 26D05

1. Вспомогательные сведения. Пусть $G = \mathbf{R}$, $G = [a,b]$ или $G = I_{2\pi}-$ отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$, для которых величина $\|x\|_{L_p(G)}$ конечна, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|x\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{t\in G} |x(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

Для $r \in \mathbf{N}$ через L^r_∞ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ и для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Пусть далее p, $\delta > 0$. Рассмотрим норму

$$\|x\|_{p,\,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}\,,\ b - a \le \delta\} \tag{1}$$

и введем следующий класс функций

$$F^r_p(\lambda) := \{x \in L^r_\infty : \ \|x\|_{p,\,\delta} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\,\delta} \cdot \|x^{(r)}\|_\infty, \quad \delta \in (0, \pi/\lambda]\}. \tag{2}$$

Примеры функций $x \in F_p^r(\lambda)$ приведены в леммах 2 и 3. В частности, произвольная функция $x \in L_\infty^r$ при любом $p > 0$ принадлежит классу $F_p^r(\lambda)$ с некоторым $\lambda > 0$, а любая функция $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, в среднем равная нулю на периоде, принадлежит классу $F_p^r(1)$ при $p \geq 1$.

Через $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ обозначим класс функций $x \in F_p^r(\lambda)$, для которых при любом $\delta \in (0, \pi/\lambda]$ каждая из точных верхних граней $\|x\|_{q,\delta}$, $q \in [p, \infty]$, достигается на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ (зависящем от q и δ). Примерами функций класса $\tilde{F}_p^r(\lambda)$ являются функции $x \in F_p^r(\lambda)$, обладающие одним из свойств:

1) $x-$ периодическая функция (произвольного периода),

2) $\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0$,

3) $x \in L_{p,\infty}$ при $p < \infty$,

4) $x-$ финитная функция.

Лемма 1. *Если функция x непрерывна на $\mathbf{R}$, а точная верхняя грань в определении* (1) *реализуется на отрезке $[a, b]$, то* [1]

$$|x(a)| = |x(b)|.$$

Для $p > 0$ положим [2]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\right\}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $p > 0$. Если для функции $x \in L_\infty^r$ число λ выбрано так, что*

$$L(x)_p \leq L(\varphi_{\lambda,r})_p \cdot \|x^{(r)}\|_\infty,$$

то $x \in F_p^r(\lambda)$ [3].

Лемма 3. *Для любой функции $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, в среднем равной нулю на периоде, при $p \geq 1$ имеет место включение $x \in \tilde{F}_p^r(1)$* [3].

2. Основные результаты. Для суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции x символом $r(x, t)$ обозначим перестановку функции $|x|$ (см., например, [4, §1.3]). При этом условимся, что $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $q > p > 0$; $\varepsilon \in (0, \pi]$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}_p^r(1)$ имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|x\|_{q,\varepsilon} \leq \frac{\|\varphi_r\|_{q,\varepsilon}}{\|\varphi_r\|_{p,\varepsilon}^\alpha} \|x\|_{p,\varepsilon}^\alpha \cdot \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p)$, а величина $\|x\|_{p,\varepsilon}$, определена равенством (1).

В частности, неравенство (4) *имеет место при $p \geq 1$ для любой функции $x \in L_\infty^r(I_{2\pi})$, в среднем равной нулю на периоде.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in \tilde{F}_p^r(1)$. Ввиду однородности неравенства (4) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{5}$$

Выберем далее $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\|x\|_{p,\,\varepsilon} = \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{p,\,\varepsilon/\lambda} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\,\varepsilon}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) ввиду включения $x \in F_p^r(1)$ следует, что

$$\lambda \geq 1. \tag{7}$$

Докажем неравенство

$$\|x\|_{q,\,\varepsilon} \leq \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{q,\,\varepsilon/\lambda}. \tag{8}$$

В силу включения $x \in \tilde{F}_p^r(1)$ существует отрезок $[a,\,b]$, для которого

$$\|x\|_{q,\,\varepsilon} = \|x\|_{L_q[a,\,b]}. \tag{9}$$

Среди таких отрезков найдется отрезок длиной ε. Поэтому можно считать, что $b - a = \varepsilon$. В силу леммы 1

$$|x(a)| = |x(b)|. \tag{10}$$

Через $\overline{x}$ обозначим сужение функции x на отрезок $[a,\,b]$, а через $\overline{\varphi}_{\lambda,r}-$ сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[m-\Theta,\,m+\Theta]$, где $m-$ точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,\,r}$, а $2\Theta = \varepsilon/\lambda$. Убедимся в том, что

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{11}$$

Предположим, что (11) не выполняется. Тогда существует такое $\omega \in (0,\lambda)$, для которого

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty. \tag{12}$$

Если $\mu-$ точка максимума сплайна $\varphi_{\omega,r}$, т. е.

$$\|\varphi_{\omega,r}\|_\infty = \varphi_{\omega,r}(\mu), \tag{13}$$

то в силу (12) и определения класса $\tilde{F}_p^r(1)$ существует такое $\tau \in \mathbf{R}$, что

$$\|x\|_\infty = |x(\mu+\tau)|. \tag{14}$$

Заметим, что в силу равенств (5) и (12) функция x удовлетворяет условиям теоремы сравнения Колмогорова [5]. Согласно этой теореме из соотношений (12) – (14) вытекает неравенство

$$|x(t+\tau)| \geq |\varphi_{\omega,r}(t)|, \quad t \in (\mu - \pi/(2\omega),\, \mu + \pi/(2\omega)).$$

Из него, принимая во внимание (7) и включение $\omega \in (0, \lambda)$, получаем

$$\|x\|_{p,\varepsilon} \geq \|x\|_{p,\varepsilon/\lambda} \geq \|\varphi_{\omega,r}\|_{L_p[\mu-\varepsilon/(2\lambda),\, \mu+\varepsilon/(2\lambda)]} = \|\varphi_{\omega,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda} > \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda},$$

что противоречит (6). Неравенство (11) доказано.

Положим $\delta(t) := r(\overline{x},\, t) - r(\overline{\varphi}_{\lambda,r},\, t)$. Заметим, что из (11) следует оценка

$$\delta(0) \leq \|x\|_\infty - \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \leq 0. \tag{15}$$

Пусть далее

$$A := \min\{|\overline{x}(t)| : t \in [a,\, b]\}, \quad B := \max\{|\overline{x}(t)| : t \in [a,\, b]\}.$$

Покажем, что разность $\delta(t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Если $B \leq |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$, то это очевидно. Пусть $B > |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|$. Тогда положим $C = \max\{A,\ |\varphi_{\lambda,r}(m+\Theta)|\}$. Ввиду (10) и (15) для любого $z \in (C,\, B)$ существуют точки

$$t_i \in [a,\, b], \quad i = 1, ..., m, \quad m \geq 2, \quad y_j \in [m-\Theta,\, m+\Theta], \quad j = 1, 2,$$

такие что

$$z = |\overline{x}(t_i)| = |\overline{\varphi}_{\lambda,r}(y_j)|. \tag{16}$$

В силу (5) и (11) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [5]. По этой теореме для точек t_i и y_j, удовлетворяющих условию (16) выполнены неравенства

$$|\overline{x}\,'(t_i)| \leq |\overline{\varphi}\,'_{\lambda,r}(y_j)|.$$

Поэтому, если точки $\Theta_1,\, \Theta_2 > 0$ выбраны так, что

$$z = r(\overline{x},\, \Theta_1) = r(\overline{\varphi},\, \Theta_2),$$

то по теореме о производной перестановки (см., например, [4, предложение 1.3.2])

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\overline{x}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность $\delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое верно и для разности $\delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t)$. Рассмотрим интеграл

$$I_p(\xi) := \int_0^{\xi} \delta_p(t)dt.$$

Ясно, что $I_p(0) = 0$ и для $\xi \geq \varepsilon$ в силу условия (6) имеем

$$I_p(\xi) \leq \|x\|_{p,\varepsilon} - \|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\varepsilon/\lambda} = 0.$$

Кроме того, производная $I'_p(t) = \delta_p(t)$ меняет знак не более одного раза (с минуса на плюс). Таким образом, $I_p(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$, т. е.

$$\int_0^\xi r^p(\overline{x},\, t)dt \le \int_0^\xi r^p(\overline{\varphi}_{\lambda,r},\, t)dt, \quad \xi > 0.$$

Из этого неравенства в силу теоремы Харди - Литлвуда - Полиа (см., например, [4, предложение 1.3.11]) следует, что

$$\|x\|_{L_q[a,\,b]} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q[m-\Theta,\,m+\Theta]} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{q,\,\varepsilon/\lambda}.$$

Отсюда ввиду (9) сразу следует (8). Применяя (8) и (6), а также учитывая определение α, получим оценку

$$\frac{\|x\|_{q,\,\varepsilon}}{\|x\|^\alpha_{p,\,\varepsilon}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_{q,\,\varepsilon/\lambda}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|^\alpha_{p,\,\varepsilon/\lambda}} = \frac{\lambda^{-(r+1/q)}\|\varphi_r\|_{q,\,\varepsilon}}{\left[\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\,\varepsilon}\right]^\alpha} = \frac{\|\varphi_r\|_{q,\,\varepsilon}}{\|\varphi_r\|^\alpha_{p,\,\varepsilon}}.$$

Из этой оценки ввиду (5) следует доказываемое неравенство (4) для функций $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Ясно, что (4) обращается в равенство для $x(t) = \varphi_r(t)$.

Осталось заметить, что выполнение неравенства (4) при $p \ge 1$ для функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равных нулю на периоде, следует из леммы 3.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $q > p > 0$. Тогда для любой функции $x \in \tilde{F}^r_p(1)$ и любого отрезка $[a,\, b] \in \mathbf{R}$ с длиной кратной числу π, имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\frac{\|x\|_{p,\,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\,\pi}}\right)^\alpha \cdot \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{17}$$

где $\alpha = (r+1/q)/(r+1/p)$, а величина $\|x\|_{p,\,\pi}$ определена равенством (1).

В частности, для любой функции $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равной нулю на периоде, при $p \ge 1$ выполнено неравенство

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|x\|_{p,\,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\,\pi}}\right)^\alpha \cdot \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty. \tag{18}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in \tilde{F}^r_p(1)$. Ввиду однородности неравенства (17) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{19}$$

Выберем далее $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\|x\|_{p,\,\pi} = \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{p,\,\pi/\lambda} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\,\pi}. \tag{20}$$

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что из (19) и (20) следует неравенство

$$\|x\|_{q,\,\pi} \le \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_{q,\,\pi/\lambda}. \tag{21}$$

По условию $b-a=n\pi$ с некоторым $n\in\mathbf{N}$. Поэтому вследствие (21) имеем

$$\|x\|^q_{L_q[a,\,b]} \le n\|\varphi_{\lambda,\,r}\|^q_{q,\,\pi/\lambda}. \tag{22}$$

Из (22) и (20), учитывая определение α и равенство $b-a=n\pi$, получаем

$$\frac{\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|x\|^\alpha_{p,\,\varepsilon}} \le \frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,\,r}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_{\lambda,\,r}\|^\alpha_{p,\,\pi/\lambda}} =$$

$$= \frac{\lambda^{-(r+1/q)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\left(\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{p,\,\pi}\right)^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}}{\|\varphi_r\|^\alpha_{p,\,\pi}}.$$

Из этой оценки ввиду (19) следует доказываемое неравенство (17). Оно обращается в равенство для функции $x(t)=\varphi_r(t)$.

Выполнение неравенства (18) при $p\ge 1$ для функций $x\in L^r_\infty(I_{2\pi})$, в среднем равных нулю на периоде, следует из (17) и леммы 3. Теорема 2 доказана.

Хорошо известно (см., например, [7]), что для функции x, такой что $x\in L_q[a,b]$ при любых $a,b\in\mathbf{R}$, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{a\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}|x\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q} =: \|x\|_{W_q}. \tag{23}$$

Функционал $\|x\|_{W_q}$ используется при определении почти периодических в смысле Вейля функций [8]. Отметим, что неравенства для производных в пространствах Вейля изучались в работах [9], [10], [11].

Полагая в неравенстве (17) $b-a=2\pi n, n\in\mathbf{N}$, и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $r\in\mathbf{N}$; $q>p>0$. Тогда для любой функции $x\in\tilde{F}^r_p(1)$ имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|x\|_{W_q} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_r(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\frac{\|x\|_{p,\,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\,\pi}}\right)^\alpha\cdot\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{24}$$

где $\alpha=(r+1/q)/(r+1/p)$, а величины $\|x\|_{W_q}$ и $\|x\|_{p,\,\pi}$ определены равенствами (23) и (1) соответственно.

Замечание. Для 2π-периодических функций класса $F_p^r(1)$ неравенство (24) трансформируется в неравенство (18).

Пусть $n, r \in \mathbf{N}$. Через T_n обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, а символом $S_{n,r}$– пространство 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 4. *Пусть $r \in \mathbf{N}$; $q > p \geq 1$. Для любого тригонометрического полинома $T \in T_n$, в среднем равного нулю на периоде, имеет место неулучшаемое на классе $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} T_n$ неравенство*

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \frac{\|\cos(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\cos(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi})}} \cdot 2^{1/p} \, \|T\|_{p,\pi}\,, \tag{25}$$

а для любого сплайна $s \in S_{n,r}$, в среднем равного нулю на периоде, имеет место неулучшаемое на классе $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} S_{n,r}$ неравенство

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \frac{\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})}} \cdot 2^{1/p} \, \|s\|_{p,\pi}\,. \tag{26}$$

Доказательство. Зафиксируем полином $T \in T_n$, в среднем равный нулю на периоде, и применим к нему неравенство (18):

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|T\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \cdot \|T^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha}\,,$$

где $\alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p)$. Применяя далее неравенство Бернштейна

$$\|T^{(r)}\|_{\infty} \leq n^r \|T\|_{\infty}\,,$$

а затем переходя к пределу при $r \to \infty$, и учитывая, что при этом

$$\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})} \to \frac{4}{\pi} \|\cos(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi})}\,, \quad p > 0\,,$$

получим (25). Ясно, что (25) обращается в равенство для полинома $T(t) = \cos t$.

Докажем (26). Зафиксируем сплайн $s \in S_{n,r}$, в среднем равный нулю на периоде, и применим к нему неравенство (18):

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|s\|_{p,\pi}}{\|\varphi_r\|_{p,\pi}}\right)^{\alpha} \cdot \|s^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha}\,,$$

где $\alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p)$. Применяя далее неравенство (см. [6, стр. 477])

$$\|s^{(r)}\|_{\infty} \leq n^{r+1/p} \frac{\|s\|_{L_p(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})}}\,,$$

и учитывая, что $\|s\|_{L_p(I_{2\pi})} \le 2^{1/p}\|s\|_{p,\pi}$, получим (26). Ясно, что (26) обращается в равенство для сплайна $s(t) = \varphi_r(t)$.

Библиографические ссылки

1. *Кофанов В. А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций [Текст] / В. А. Кофанов// Укр. мат. журн. – 2015. – 67, 2. – С. 202 – 212.
2. *Pinkus A.* Variations on the Chebyshev and L^q Theories of Best Approximation [Text] / A. Pinkus, O. Shisha// Journal of Approximation Theory. – 1982. – 35, 2. – P. 148 – 168.
3. *Кофанов В. А.* Решение задачи Боянова-Найденова с ограничениями на норму $\|\cdot\|_{p,\delta}$ [Текст] / В. А. Кофанов// Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Математика.– 2017. – Вып. 22. – С. 41– 50.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст] / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун// К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.
5. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале [Текст] / А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – 470 с.– С. 252–263.
6. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для производных и их приложения [Текст]/ Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// К.: Наукова думка, 2003. – 590 с.
7. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции [Текст]/ Б. М. Левитан // М: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
8. *Weyl H.* Almost periodic invariant vector sets in a metric vector spase [Text] /H. Weyl// Amer. Journ. of Math. – 1949. – 71, 1. – p. 178 – 205.
9. *Бабенко В. Ф.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций [Текст]/В. Ф. Бабенко, С. А. Селиванова //Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ, Дніпропетр. нац. ун-т. – 1998. – с. 91 – 95.
10. *Kofanov V. A.* Some extremal problems various metrics and sharp inequalities of Nagy-Kolmogorov type [Text] / V. A. Kofanov// East. J. Approxim. – 2010. – 16, 4. – C. 313 – 334.
11. *Кофанов В. А.* Неравенства для непериодических сплайнов на действительной оси и их производных [Текст]/В. А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, 2. – С. 216 – 225.

Received: 24.02.2018. *Accepted:* 20.06.2018