ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2015, вип. **20**

УДК 517.5

В. I. Рубан

Днiпропетровський нацiональний унiверситет iменi Олеся Гончара

Теорема двоїстостi для задачi наближення у нечiткiй постановцi

Одержано нечiткий аналог теореми двоїстостi для найкращого наближення опуклою множиною.

Ключовi слова: наближення, двоїстiсть, нечiткi.

Получен нечеткий аналог теоремы двойственности для наилучшего приближения выпуклым множеством.

Ключевые слова: приближение, двойственность, нечеткие.

We obtained fuzzy analogue of duality theorem for the best approximation by a convex set.

Key words: approximation, duality, fuzzy.

Поняття нечiткої множини ввiв Заде [1].

Нехай X – довiльна множина. *Нечiткою пiдмножиною* A множини X, або просто *нечiткою множиною*, називають вiдображення $\mu_A : X \to [0,1]$. Значення $\mu_A(x)$ називають *ступенем належностi елемента* x нечiткiй множинi A.

У подальшому X буде лiнiйним нормованим простором. Нечiтку множину A з простору X називають *опуклою*, якщо множини

$$\Gamma_\alpha = \{x |\, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

опуклi для всiх $\alpha > 0$.

У монографiї [2] дослiджено задачi наближення функцiй пiдпросторами полiномiв i сплайнiв у нечiткiй постановцi. У данiй статтi ми розглядаємо iнший спосiб введення поняття нечiткостi в теорiю наближень.

Спочатку наведемо згiдно з [3] деякi поняття теорiї наближень у класичнiй постановцi.

Нехай X – лiнiйний простiр над полем дiйсних чисел, p – визначена на X несиметрична напiвнорма, тобто функцiя зi значеннями в $[0,\infty)$, яка задовольняє умови

$$p\,(0) = 0,$$

$$p\,(x+y) \leq p\,(x) + p\,(y),$$

$$p\,(\alpha x) = \alpha p\,(x)$$

для $\alpha > 0$.

Для $\Theta \subset X$ та $x \in X$ визначимо відстань між x та Θ таким чином:

$$p\,(x, \Theta) = \inf\{p\,(x-u)|\, u \in \Theta\}. \tag{1}$$

Далі позначимо через X' множину всіх лінійних функціоналів на X і покладемо для $f \in X'$

$$p^*(f) = \sup\{f(x)|\, x \in X, p\,(x) \leq 1\}.$$

У [3] наведено теорему двоїстості для задачі наближення фіксованого елемента x лінійного простору X опуклою підмножиною Θ за умови, що відстань між x та Θ визначено за допомогою (1). У [3] викладемо також історію доведення цієї теореми.

Далі покладемо, що $\bar{\Theta}$ – нечітка опукла підмножина з лінійного простору X з напівнормою p. Функцію належності $\bar{\Theta}$ позначимо $\mu_{\bar{\Theta}}$. Для кожного α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ покладемо

$$\bar{\Gamma}_\alpha = \{x|\, \mu_{\bar{\Theta}}(x) \geq \alpha\}.$$

Через $\bar{p}(x, \bar{\Theta})(\alpha)$ позначимо функцію на $[0, 1]$, яка у відповідність кожному $\alpha \in [0, 1]$ ставить визначену за (1) величину $p\,(x, \bar{\Gamma}_\alpha)$. На $[0, 1]$ функція $\bar{p}$ є неперервна, монотонно зростаюча, але не строго монотонна.

Через $V(x, \bar{\Theta})$ позначимо нечітку множину з $[0, \infty)$, яка має таку функцію належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \notin \operatorname{Im} \bar{p}(x, \bar{\Theta}); \\ \sup \bar{p}^{-1}(x, \bar{\Theta})(x), x \in \operatorname{Im} \bar{p}(x, \bar{\Theta}). \end{cases} \tag{2}$$

З наведеної в [3] теореми 1.2.1 випливає, що

$$\bar{p}(x, \bar{\Theta})(\alpha) = \sup\{f(x) - \sup_{u \in \bar{\Gamma}_\alpha} f(u)|\, f \in X', p^*(f) \leq 1\}. \tag{3}$$

Застосовуючи (3), одержуємо теорему.

Теорема 1. *Для опуклої множини $\bar{\Theta}$ в лінійному просторі X з несиметричною напівнормою p нечіткою відстанню від елемента $x \in X$ до $\bar{\Theta}$ є нечітка множина $V(x, \bar{\Theta})$ з функцією належності, визначеною за* (2).

Бібліографічні посилання

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy set/ L.A. Zadeh – // Information and Control 8.– 1965.– P.338–353.
2. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory/ G. A. Anastassiou // Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.–443 p .
3. *Корнейчук Н.И.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов/ Н.И. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун.– К., 1992.– 304 с.

Надійшла до редколегії 22.06.2015