Вісник Дніпровського університету. Серія Математика https://vestnmath.dnu.dp.ua
Vìsn. Dnìpro unìv., Ser. Mat. **26** (2018) p. 62–67 ISSN (Print) 2312-9557
doi:10.15421/241808 ISSN (Online) 2518-7996

УДК 517.5

А. М. Пасько*, **В. Д. Стефура****
* Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. *E-mail: pasko08@meta.ua*
** Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050.

Поточкові оцінки найкращих односторонніх наближень класів W^r_∞ при $0 < r < 1$

Знайдено асимтотично точну оцінку найкращих односторонніх наближень функцій класів W^r_∞, $0 < r < 1$, з урахуванням положення точки на відрізку.

Ключові слова: найкращі наближення, найкращі односторонні наближення, асимтотично точна оцінка, поточкове наближення, інтеграл дробового порядку.

Найдена ассимптотически точная оценка наилучших односторонних приближений функций классов W^r_∞, $0 < r < 1$, с учётом положения точки на отрезке.

Ключевые слова: наилучшие приближения, наилучшие односторонние приближения, ассимптотически точная оценка, поточечное приближение, интеграл дробного порядка.

The asymptotic pointwise estimation of the best one-sided approximation to the classes W^r_∞, $0 < r < 1$, has been established.

Key words: the best approximation, the best one-sided approximation, asymptotic estimation, pointwise approximation, fractional integral.

MSC2010: Pri 41A10, Sec 41A50, 41A29, 26A33

Нехай r – натуральне число, W^r_∞ – клас визначених на відрізку $[-1, 1]$ функцій f, таких що $f^{(r-1)}$ – абсолютно неперервна на $[-1, 1]$, а $f^{(r)}$ майже скрізь на $[-1, 1]$ задовольняє нерівність $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. С.М. Нікольський [1] відкрив дуже цікавий феномен покращення якості наближення функцій алгебраїчними поліномами біля кінців відрізка, встановивши, що для будь-якої функції $f \in W^1_\infty$ можна вказати послідовність алгебраїчних поліномів $P_n(x)$ степеня не вищого за n, таку що при $n \longrightarrow \infty$ рівномірно щодо $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| \leq \frac{\pi}{2n}\sqrt{1 - x^2} + |x| O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{1}$$

Над різноманітними узагальненями одержаної С.М. Нікольським оцінки (1) працювала ціла низка видатних учених. Зокрема, В.М. Тємляков [2] для $r = 1$ та Р.М. Тригуб [3] для всіх натуральних $r > 1$ узагальнили оцінку (1), довівши що для будь-якої $f \in W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, та $n \geq r - 1$ можна вказати алгебраїчний поліном $P_{n,r}(x)$ степеня не вищого за n, такий що для будь-якого $x \in [-1, 1]$ виконується нерівність

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \leq \frac{K_r}{n^r} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (2)$$

тут і в подальшому C_r означає залежну лише від r сталу, конкретні значення якої в різних місцях можуть бути різними.

Надалі оцінка (2) узагальнювалася в двох напрямках. Перший напрямок стосується класів, заданих обмеженням на модуль неперервності старшої похідної. Нехай $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності, такий що $t\frac{d}{dt}\omega(t)$ не зростає. У праці [4] В.П. Моторний встановив, що для довільної функції $f \in W^r H^\omega$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_{n,r}(x)$ степеня не вищого за $n \geq r$ (при r=0, n>1), таких що

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \leq \frac{K_r}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(\frac{2K_{r+1}}{nK_r}\sqrt{1-x^2}\right) +$$

$$+ C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ln n}{n^{r+1}}.$$

Другий напрямок пов'язано з класами W^r_∞ при додатному нецілому r. Нехай r – неціле додатне число, W^r_∞ – клас функцій $f_r(x)$, визначених на відрізку [–1; 1] рівністю

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f(t)dt + P(x),$$

де $\Gamma(r)$ – гама-функція Ейлера, функція $f(t)$ – вимірна та майже скрізь $|f(t)| \leq 1$, $P(x)$ – алгебраїчний поліном степеня не вищого за $[r - 1]$ ([a] – ціла частина a).

В.П. Моторний [5] встановив, що для довільного числа $r > 0$ і довільної функції $f \in W^r_\infty$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_{n,r}(x)$ степеня не вищого за $n \geq [r]$, таких що для всіх $x \in [-1, 1]$ виконується нерівність

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \leq \frac{K_r}{n^r} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} \ln n}{n^{r+1}}, \qquad (3)$$

де

$$K_r = \frac{4 \sin \frac{r\pi}{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \text{якщо} \quad 0 < r < 1,$$

та

$$K_r = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}} \right| \quad \text{якщо} \quad r > 1,$$

а $\gamma_r \in [0,\pi)$ – корінь рівняння

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^r} = 0.$$

Окреме відгалуження теорії апроксимації становлять оцінки найкращих односторонніх наближень із урахуванням положення точки на відрізку. В.Г. Доронін, А.О. Лигун у праці [6] довели, що для будь-якої функції $f \in W^r_\infty$ (r – натуральне число) можна вказати послідовність алгебраїчних поліномів $P^+_{n,r}$ степеня не вищого за n, таку що при $n \longrightarrow \infty$ рівномірно щодо $x \in [-1,1]$

$$0 \le P^+_{n,r}(x) - f(x) \le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Аналог для односторонніх наближень оцінки (2) одержав А.М. Пасько в праці [7], довівши, що для будь-якої функції $f \in W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, та довільного $n \ge r-1$ існує многочлен $P^+_{n,r}(x)$, який задовольняє нерівність

$$0 \le P^+_{n,r}(x) - f(x) \le 2K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + C_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}.$$

У праці [8] А.М. Пасько довів, що для будь-якого нецілого числа r>1 і будь-якої функції $f \in W^r_\infty$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P^+_{n,r}(x)$ степеня $n \ge [r]$, таких що для всіх $x \in [-1,1]$ справджується нерівність

$$0 \le P^+_{n,r}(x) - f(x) \le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$
$$+C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]}}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\right), \tag{4}$$

якщо $[r]$ – парне, і

$$0 \le P^+_{n,r}(x) - f(x) \le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$
$$+C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]-1}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\right), \tag{5}$$

якщо $[r]$ – непарне.

В цій роботі ми позбудемось обмеження $r > 1$ в оцінці (4). А саме, виконується така теорема.

Теорема 1. *Нехай $0 < r < 1$. Для будь-якої функції $f \in W^r_\infty$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P^+_{n,r}(x)$ степеня не вищого за n, таких що для всіх $x \in [-1,1]$ справджується нерівність*

$$0 \le P^+_{n,r}(x) - f(x) \le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$

$$+C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}+\frac{\ln n}{n^{2r}}\right). \tag{7}$$

Для доведення теореми 1 знадобляться такі дві леми.

Лема 1. *Нехай* $0 < r < 1$. *Можна побудувати послідовність алгебраїчних многочленів* $h^+_{n,r}(x), n \in \mathbb{N}$, *які, разом із залежною лише від* r *сталою* C^*_r, *для кожного натурального* n *задовольняють нерівність*

$$0 \le h^+_{n,r}(x) - \left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} \le C^*_r n^{1-r}. \tag{8}$$

Доведення леми 1. Позначимо $\alpha = 1-r$ і введемо функцію

$$u(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+|t|\right)^{\alpha}}, \quad t \in [-1,1].$$

Модуль її похідної

$$|u'(t)| = \left|\frac{-\alpha \cdot \operatorname{sign} t}{\left(\frac{1}{n}+|t|\right)^{\alpha+1}}\right| \le \alpha n^{\alpha+1}.$$

Оскільки функція $u(t)$ – абсолютно неперервна, то вона належить класу Ліпшиця: $u \in \alpha n^{\alpha+1} H^1$. В такому разі за теоремою Джексона для будь-якого натурального m існує алгебраїчний поліном $p_m(t)$ для якого виконується нерівність

$$|u(t)-p_m(t)| \le \frac{A_\alpha n^{\alpha+1}}{m}, \quad t \in [-1,1],$$

де A_α – стала, що залежить лише від α (не залежить ні від n, ні від m). Взявши тут $m = n$, одержимо, що для всіх $t \in [-1,1]$ виконується нерівність

$$|u(t)-p_n(t)| \le A_\alpha n^{\alpha}. \tag{9}$$

Оскільки функція $u(t)$ – парна, то поліном $p_n(t)$ теж можна вважати парним. Зробимо в нерівності (9) заміну $t = \sqrt{1-x^2}$. Оскільки змінна t входить у парний алгебраїчний поліном $p_n(t)$ винятково в парних степенях, $p_n(t)$ після цієї заміни перетвориться на алгебраїчний поліном $z_n(x)$ степеня не вищого за n, а сама нерівність (9) набуде вигляду

$$\left|\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} - z_n(x)\right| \le A_{1-r} n^{1-r}. \tag{10}$$

Запишемо тепер (10) як подвійну нерівність

$$-A_{1-r}n^{1-r} \le z_n(x) - \left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} \le A_{1-r}n^{1-r}. \tag{11}$$

Додавши до всіх трьох частин подвійної нерівності (11) величину $A_{1-r}n^{1-r}$ і позначивши

$$h_n^+(x) = z_n(x) + A_{1-r}n^{1-r}, \quad C_r^* = 2A_{1-r},$$

одержуємо (8). Доведення леми завершено.

Лема 2. *Нехай β – довільна стала, ω – модуль неперервності. Тоді для будь-якого натурального n існує алгебраїчний поліном $q_n(x)$ степеня не вищого за n, такий що для всіх $x \in [-1, 1]$*

$$\left|\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right) - q_n(x)\right| \le C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{12}$$

з незалежною від n сталою C.

Доведення леми 2 міститься в [9].

Доведення теореми 1. Нехай $0 < r < 1$. Перепишемо (3) у вигляді

$$-\frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r - C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}} \le$$

$$\le P_{n,r}(x) - f(x) \le \frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}},$$

і додавши

$$\frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}}$$

до всіх трьох частин цієї подвійної нерівності, одержимо

$$0 \le P_{n,r}(x) + K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}} - f(x) \le$$

$$\le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + 2C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}}. \tag{13}$$

Узявши в (12) за модуль неперервності $\omega(t) = t^r$, $\beta = 1$, одержимо, що для деякого алгебраїчного полінома $q_n(x)$

$$\left|\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r - q_n(x)\right| \le \frac{C}{n^{2r}}.$$

Переписавши цю нерівність у вигляді подвійної

$$-\frac{C}{n^{2r}} \le q_n(x) - \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \le \frac{C}{n^{2r}},$$

і додавши до всіх трьох частин C/n^{2r}, одержимо

$$0 \le q_n^+(x) - \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \le \frac{2C}{n^{2r}}, \tag{14}$$

де алгебраїчний поліном

$$q_n^+(x) = q_n(x) + \frac{C}{n^{2r}}.$$

Додавши до (13) помножену на K_r нерівність (14) і помножену на $\frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}$ нерівність (8), після нескладних перетворень одержимо нерівність (7) для полінома

$$P_{n,r}^+(x) = P_{n,r}(x) + K_r q_n^+(x) + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}} h_{n,r}^+(x).$$

Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении функций удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – т.10, №4. – с. 295 – 332.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W_∞^1 алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – т.29, вып. 4. – с. 597 – 602.
3. *Тригуб Р.М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Мат. заметки. – 1993. – т. 54, вып. 6 – с. 113 – 121.
4. *Моторный В.П.* О точных оценках поточечного приближения алгебраическими многочленами классов $W^r H^\omega$ // УМЖ – 2001. – т. 53, № 6 – с. 783 – 799.
5. *Моторный В.П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // УМЖ – 1999. – т. 51, № 7 – с. 940 – 951.
6. *Доронин В.Г., Лигун А.А.* О наилучшем одностороннем приближении на отрезке // Изв. вузов – 1980. – Математика. – № 5 – с. 16 – 21.
7. *Пасько А.Н.* Одностороннее приближение функций класса W_∞^r алгебраическими полиномами с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2006. – Математика. – вип. 11. – с. 67 – 70.
8. *Пасько А.Н.* Наилучшее одностороннее приближение классов интегралов дробного порядка с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2010. – Математика. – вип. 15. – с. 128 – 132.
9. *Пасько А.Н.* Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2005. – Математика. – вип. 10. – с. 86 – 91.

Received: 25.01.2018. *Accepted:* 20.06.2018