Researches in Mathematics
Res. Math. **28**(1), 2020, p. 22–28
doi:10.15421/242003

https://vestnmath.dnu.dp.ua
ISSN (Print) 2664-4991
ISSN (Online) 2664-5009

UDK 517.5

A. M. Pasko*

* Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro 49050. *E-mail: pasko08@meta.ua*

The pointwise estimation of the one-sided approximation of the class $\breve{W}^r_\infty$, $0 < r < 1$

Стаття присвячена оцінкам поточково-односторонніх наближень на відрізку певних класів сингулярних інтегралів алгебраїчними многочленами. Феномен залежності між величиною наближення гладкої функції алгебраїчними поліномами і розміщенням точки на відрізку було відкрито 1946 р. С.М. Нікольським, який встановив асимптотично точну оцінку найкращих наближень алгебраїчними могочленами з урахуванням положення точки на відрізку класу гладких функцій W^1_∞. Пізніше дослідження в цьому напрямку були розвинуті в роботах таких відомих математиків, як О.П. Тіман, В.К. Дзядик, С.О. Теляковський, М.П. Корнійчук, О.І. Половина, В.М. Тємляков, Р.М. Тригуб, В.П. Моторний, В.Г. Доронін, А.О. Лигун та інших. Зокрема, В.М. Тємляков для $r = 1$ та Р.М. Тригуб для всіх натуральних $r > 1$ встановили асимптотично точну оцінку найкращих наближень алгебраїчними поліномами класів W^r_∞ з урахуванням положення точки на відрізку. При цьому, як головний, так і залишковий член у цих оцінках залежать від розташування точки на відрізку. В.П. Моторний поширив ці результати на випадок нецілого r, встановивши асимптотично точну оцінку найкращих наближень алгебраїчними поліномами класів W^r_∞ при нецілому $r > 0$ з урахуванням положення точки на відрізку. Він же у 2001р. знайшов оцінки найкращих наближень класів сингулярних інтегралів $\hat{W}^r_\infty$, $\breve{W}^r_\infty$, $r > 0$, алгебраїчними поліномами з урахуванням положення точки на відрізку, з непокращуваною константою в головному члені у випадку цілого r, а також – асимптотично точні оцінки найкращих наближень класів сингулярних інтегралів $\bar{W}^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, алгебраїчними поліномами з урахуванням положення точки на відрізку. А.М. Паськом, О.О. Колесником 2013р. одержано оцінку найкращих поточково-односторонніх наближень на відрізку алгебраїчними многочленами функцій класу $\breve{W}^r_\infty$, $r \geq 1$. Однак, випадок, коли, $0 < r < 1$, залишався недослідженим. Результати даної статті заповнюють цю прогалину – встановлено оцінку найкращих поточково-односторонніх наближень на відрізку алгебраїчними многочленами класів $\breve{W}^r_\infty$ при $0 < r < 1$.

Ключові слова: найкращі односторонні наближення, сингулярні інтеграли, алгебраїчні многочлени

The pointwise estimation of the one-sided approximation of the class $\breve{W}^r_\infty$, $0 < r < 1$, is established.

Key words: the best one-sided approximation, singular integrals, algebraic polynomials

MSC2010: Pri 41A10, Sec 41A29

Consider the number $r \in \mathbb{N}$. Let W^r_∞ be the class of all functions on $[-1, 1]$ with absolutely continuous $(r-1)$-th derivative and $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ almost everywhere. S.M.

Nikolskii [4] has established that for every $f \in W^1_\infty$ there is a sequence of algebraic polynomials P_n of degree not greater than n such that

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| \le \frac{\pi}{2n}\sqrt{1-x^2} + |x| O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

for $n \longrightarrow \infty$, where the constant determining remainder $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ doesn't depend on $x \in [-1,1]$.

Temlyakov V.N. [10] for $r = 1$ and Trigub R.M. [11] for all integers $r > 1$ proved that for every $f \in W^r_\infty$, $n \le r-1$ there is an algebraic polynomial $P_{n,r}$ of degree not greater than n such that

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \le \frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}},$$

for all $x \in [-1,1]$. Here and further the symbol C_r means a constant depending only on r, the values of this constant in different places may be different.

Consider the number $r > 0, r \notin \mathbb{N}$. Let W^r_∞ be the class of functions f_r defined by the equality

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f(t)dt + P(x), \quad x \in [-1,1],$$

where $\Gamma(r)$ is the Euler gamma function, the function f is measurable and almost everywhere $|f(t)| \le 1$, P is an algebraic polynomial of degree not greater than $[r-1]$ ($[a]$ is the greatest integer less than or equal to a).

V.P. Motornyi [2] has established that for every non-integer $r > 0$ and every $f \in W^r_\infty$ there is a sequence of algebraic polynomials $P_{n,r}$ of degree not greater than n such that for every $x \in [-1,1]$

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \le \frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\ln n}{n^{r+1}},$$

where

$$K_r = \frac{4\sin\frac{r\pi}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \text{if} \quad 0 < r < 1,$$

$$K_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \quad \text{if} \quad r > 1,$$

and $\gamma_r \in [0,\pi)$ is the root of the equation

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^r} = 0.$$

Consider the number $r > 0$. Let $\breve{W}^r_\infty$ be the the class of all functions defined by Cauchy principal value integral

$$S(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-\ t^2}dt,\ f \in W^r_\infty,$$

where $x \in (-1;1)$.

V.P. Motornyi [3] proved that for each $r > 0$ and every $f \in \breve{W}^r_\infty$ there is a sequence of algebraic polynomials P_n of degree not greater than n, $n \geq r+1$, such that for each $x \in [-1,1]$.

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r, \tag{1}$$

where

$$\tilde{K}_r = \frac{4\cos\frac{r\pi}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \text{if} \quad 0 < r \leq \frac{1}{2},$$

$$\tilde{K}_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \quad \text{if} \quad r > \frac{1}{2},$$

$\gamma_r \in (0,\pi]$ is the root of the equation

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^r} = 0,$$

and the constant C_r depends only on r.

Consider pointwise one-sided approximation by algebraic polynomials. V.G. Doronin, A.O. Ligun [1] proved that for each $f \in W^r_\infty$, $r \in \mathbb{N}$, there is a sequence of algebraic polynomials $P^+_{n,r}$ of degree not greater than n

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad x \in [-1,1],$$

for $n \longrightarrow \infty$, where K_r is the Favard constant

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}},$$

and the constant determining remainder $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ doesn't depend on $x \in [-1,1]$.

A.M. Pasko [6] proved that for every $f \in W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$ and $n \geq r-1$ there is algebraic polynomial $P^+_{n,r}$ of degree not greater than n such that

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq 2K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r + C_r\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \quad x \in [-1,1].$$

A.M. Pasko[5], A.M. Pasko, V.D. Stefura [9] proved that for every non-integer r>0 and every $f \in W_\infty^r$ there is a sequence of algebraic polynomials $P_{n,r}^+$ of degree not greater than $n \geq [r]$ such that for all $x \in [-1,1]$

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$

$$+C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]}}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\right),$$

if $[r]$ is even,

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$

$$+C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]-1}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}\right),$$

if $[r]$ is odd.

A.M.Pasko, O.O. Kolesnik [8] got the analogue of estimation (1) for one-sided approximation. They has proved that for every $r \geq 1$ and $f \in \breve{W}_\infty^r$ there is a sequence of algebraic polynomials $P_{n,r}^+$ of degree not greater than n such that $\forall x \in (-1;1)$

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\left(\frac{1}{n^{r+\{r\}}}(\sqrt{1-x^2})^{[r]+1} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r\right),$$

if $[r]$ is odd,

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^{[r]}}{n^{r+\{r\}}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r\right),$$

if $[r]$ is even. The symbol $\{r\}$ means fraction part of a number r, $\{r\} = r - [r]$.

The main result of the paper is the following theorem.

Theorem 1. *For every function $f \in \breve{W}_\infty^r$, $0 < r < 1$, there is a sequence of algebraic polynomials $P_{n,r}^+$ of degree not greater than n such that $\forall x \in (-1;1)$*

$$0 \leq P_{n,r}^+(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} + \frac{C_r \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right). \tag{2}$$

In order to prove the theorem we need the following lemma.

Lemma 1. *Let $\omega(t), t \geq 0$, be the modulus of continuity and the constant $\beta > 0$. There is a sequence of algebraic polynomials $q_n(x)$ of degree not greater than n such that $\forall x \in [-1; 1]$*

$$0 \leq q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \leq$$

$$\leq C\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

where the constant C depends on β only.

The lemma is proved in [7]. Applying lemma 1 to the modulus of continuity $\omega(t) = t^r, 0 < r < 1, \beta = 1$, we get

$$0 \leq q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \leq C\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{2r}}. \tag{3}$$

Consider $0 < r < 1$ and the function

$$\phi(t) = \left(\frac{1}{n} + |t|\right)^r, \; t \in [-1, 1].$$

For each $m \in \mathbb{N}$ let z_m be the polynomial of the best uniform approximation to the function ϕ of degree not greater than m. The function $\phi \in \mathrm{Lip}_1 r$, so by the virtue of Jackson's theorem

$$|z_m(t) - \phi(t)| \leq \frac{C}{m^r}, \; t \in [-1, 1], \tag{4}$$

C depends only on r.

The function ϕ is even, therefore the polynomials z_m are even also. So after the substitution $t = \sqrt{1-x^2}$ the inequality (4) turns into

$$\left|h_m(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r\right| \leq \frac{C}{m^r}, \tag{5}$$

where $h_m(x) = z_m\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ is the algebraic polynomial of degree not greater than m. Letting $m = n$ in (5) gives us

$$\left|h_n(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r\right| \leq \frac{C}{n^r}.$$

This inequality can be written as

$$-\frac{C}{n^r} \leq h_n(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \leq \frac{C}{n^r},$$

or

$$0 \leq q_n^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \leq \frac{2C}{n^r},$$

where $q_n^+(x) = h_n(x) + \frac{C}{n^r}$. So replacing $2C$ by the constant C we get the following lemma.

Lemma 2. *For any $r \in (0,1)$ there is a sequence of algebraic polynomials $q_n^+(x)$ of degree not greater than n such that $\forall x \in [-1,1]$*

$$0 \le q_n^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \le \frac{C}{n^r}. \tag{6}$$

The proof of the theorem. Let $f \in \breve{W}_\infty^r$, $0 < r < 1$. The inequality (1) can be written in the form

$$-\frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} - C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r \le$$

$$\le P_n(x) - f(x) \le$$

$$\le \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r,$$

or

$$0 \le P_n(x) - f(x) + \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r \le$$

$$\le \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + \frac{2C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r. \tag{7}$$

Let's add the inequality (7), the inequality (3) multiplied by $\tilde{K}_r$ and the inequality (6) multiplied by $\frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}$. We get

$$0 \le P_{n,r}^+(x) - f(x) \le \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + \frac{2C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$

$$+\frac{\tilde{K}_r C}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{C_r C \ln n}{n^{2r+1}}, \tag{8}$$

where $P_{n,r}^+(x) = P_n(x) + \tilde{K}_r q_n(x) + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}} q_n^+(x)$.

Let's estimate from above the sum

$$\frac{\tilde{K}_r C}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{C_r C \ln n}{n^{2r+1}} \le \frac{\tilde{K}_r C \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{C_r C \ln n}{n^{2r+1}} \le$$

$$\le \frac{C \max\{\tilde{K}_r, C_r\} \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{2}{n}+\sqrt{1-x^2}\right) \le \frac{2C \max\{\tilde{K}_r, C_r\} \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)$$

Then denote the constant $2C\max\{\tilde{K}_r, C_r\}$ as C again. So the inequality (8) implies

$$0 \leq P^{+}_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} +$$

$$+\frac{2C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r + \frac{C \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right). \tag{9}$$

Let's estimate the second and third terms in the right hand of (9).

$$\frac{2C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r + \frac{C \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right) \ll \frac{C_r \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)\cdot$$

$$\times\left(\frac{1}{n^{1-r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1} + 1\right) \leq \frac{2C_r \ln n}{n^{2r}}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right).$$

So (9) implies the inequality (2). The theorem is proved.

References

1. *Доронин В.Г., Лигун А.А.* О наилучшем одностороннем приближении на отрезке // Изв. вузов. – 1980. – Математика. – № 5. – с. 16 – 21.
2. *Моторный В.П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами // УМЖ. – 1999. – т. 51, № 7. – с. 940 – 951.
3. *Моторный В.П.* Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // УМЖ. – 2001. – т. 53, № 3. – с. 331 – 345.
4. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – т. 10, №4. – с. 295 – 332.
5. *Пасько А.Н.* Наилучшее одностороннее приближение классов интегралов дробного порядка с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2010. – Математика. – вип. 15. – с. 128 – 132.
6. *Пасько А.Н.* Одностороннее приближение функций класса W^r_∞ с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2006. – Математика. – вип. 11. – с. 67 – 70.
7. *Пасько А.Н.* Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2009. – Математика. – вип. 14. – с. 99 – 102.
8. *Пасько А.М., Колесник О.О.* Поточкові оцінки односторонніх наближень одного класу сингулярних інтегралів // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. – 2013. – Математика. – вип. 18. – с. 141 – 144.
9. *Пасько А.М., Стефура В.Д.* Поточкові оцінки найкращих односторонніх наближень класів W^r_∞ при $0 < r < 1$ // Вісн. Дніпровського ун-ту. – 2018. – Математика. – вип. 23. – с. 62 – 67.
10. *Темляков В.Н.* Приближение функций из класса W^1_∞ алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – т. 29, вып. 4. – с. 597 – 602.
11. *Тригуб Р.М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Мат. заметки. – 1993. – т. 54, вып. 6. – с. 113 – 121.

Received: 15.02.2020. *Accepted:* 02.05.2020