УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Н. А. Крячко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com, nadiakriachko@gmail.com

О неравенствах типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве

Отримано сімейство точних адитивних нерівностей типу Харді-Літлвуда-Поліа для операторів в гільбертовому просторі.

Ключові слова: гільбертів простір, оператор, нерівності типу Харді-Літлвуда-Поліа.

Получено семейство точных аддитивных неравенств типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор, неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа.

A family of exact additive inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's type has been received for operators in Hilbert space.

Key words: Hilbert space, operator, inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's.

1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ - действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. Через $L_2(\mathbb{G})$ будем обозначать пространство измеримых функций $x : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\|x\|_{L_2(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty,$$

$L_2^r(\mathbb{G})$, $r \in \mathbb{N}$, - пространство всех функций x , которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{G})$; $L_{2,2}^r(\mathbb{G}) = L_2(\mathbb{G}) \cap L_2^r(\mathbb{G})$.

Хорошо известно (см., напр. [1]), что для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{R})$ выполняется точное неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{G})} \leq \|x\|_{L_2(\mathbb{G})}^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{G})}^{k/r}, \quad r, k \in \mathbb{N}, \quad k < r. \quad (1.1)$$

В случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ неравенство (1.1) эквивалентно семейству аддитивных неравенств

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq A \|x\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \quad (1.2)$$

и для любого заданного $A > 0$ константа $\frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}}$ неулущаема [2, §5.4].

Для $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ из неравенства (1.1) вытекает справедливость следующего аналога неравенства (1.2): для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{T})$

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq A \|x\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2, \quad (1.3)$$

однако, константа $\frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}}$, в отличие от непериодического случая, вообще говоря, не является точной [1]. Задача отыскания неулущаемых аддитивных неравенств для функций класса $L_{2,2}^r(\mathbb{T})$ решена в работе [2] (см. также [3, §5.4]).

Приведем некоторые результаты, связанные с обобщением неравенств Харди-Литтлвуда-Поля на случай достаточно произвольных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, которые были получены в работе [4].

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $\{e_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ - ортонормированный базис в H . Пусть также $c_\nu = (x, e_\nu)$ - коэффициенты Фурье элемента $x \in H$ и $\sum_\nu c_\nu e_\nu$ - его ряд Фурье.

Пусть $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ - комплекснозначные функции, заданные на множестве целых чисел и удовлетворяющие условиям:

- 1) $|f(\nu)|$ и $|\varphi(\nu)|$ не убывают с ростом $|\nu|$ и $|f(\nu)| = |f(-\nu)|$, $|\varphi(\nu)| = |\varphi(-\nu)|$ для любого $\nu \in \mathbb{Z}$;
- 2) функции $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ связаны соотношением

$$|\varphi(\nu)|^2 = \alpha(|f(\nu)|^2), \quad (1.4)$$

где $\alpha(t)$, $t \geq 0$, - выпуклая вверх неубывающая функция, $\alpha(0) = 0$.

Рассмотрим операторы A_f и A_φ , определенные следующим образом.

Для $x = \sum_\nu c_\nu e_\nu$ положим

$$A_f x = \sum_\nu f(\nu) c_\nu e_\nu, \quad A_\varphi x = \sum_\nu \varphi(\nu) c_\nu e_\nu,$$

$$D_{A_f} = \left\{ x : \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty \right\} \text{ и } D_{A_\varphi} = \left\{ x : \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty \right\} -$$

соответственно области определения операторов A_f и A_φ . Нетрудно убедиться в том, что $D_{A_f} \subset D_{A_\varphi}$.

В работе [4] доказано, что для любого $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right), \quad (1.5)$$

которое обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν , $\nu \in \mathbb{N}$.

Неравенство (1.5) представляет собой обобщение классического неравенства Харди-Литтлвуда-Полиа. В частности, в неравенстве (1.5) содержится неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа для периодических функций.

Также в [4] для всех $x \in D_{A_f}$ и любого $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2} \right)$ было получено семейство аддитивных неравенств вида

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq C_K \|x\|^2 + K \|A_f x\|^2 \quad (1.6)$$

и доказано, что для любого заданного $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2} \right)$ константа C_K в (1.6) неумлучшаема.

В данной работе исследуется задача получения семейства аддитивных неравенств другого вида: для любого $x \in D_{A_f}$

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|x\|^2 + C_K \|A_f x\|^2, \quad (1.7)$$

когда $K \in \left[0; \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2) \right)$, точных в том смысле, что для любого заданного $K \in \left[0; \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2) \right)$ константу C_K уменьшить нельзя.

2. Другой вариант точных аддитивных неравенств типа Харди – Литтлвуда – Полиа.

В дополнение к условиям 1) и 2), наложенным в предыдущем пункте на функции f , φ и α , будем предполагать, что функция f строго возрастает, $f(0) = 0$, $\alpha(t)$ – дифференцируема в любой точке $t > 0$, причем $\alpha'(t) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +\infty$.

Для любого $K \geq 0$ можем написать

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \sum_{\nu} |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 = \sum_{\nu} (|\varphi(\nu)|^2 - K) |c_\nu|^2 + \sum_{\nu} K |c_\nu|^2 = \\ &= \sum_{\nu} \frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2} |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 + \sum_{\nu} K |c_\nu|^2 \leq K \|x\|^2 + \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2} \right) \|A_f x\|^2. \end{aligned}$$

Для $\nu = 0, 1, 2, \dots$ положим $\gamma_\nu = |f(\nu)|^2$. Последнее неравенство перепишем в виде

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|x\|^2 + \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - K}{\gamma_\nu} \right) \|A_f x\|^2.$$

Положим $M = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \alpha(\gamma_\nu)$ и далее будем предполагать, что $K \in [0; M)$.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_\nu = \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}}, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Из выпуклости функции α и теоремы Коши следует, что $\psi_\nu \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$, $\inf_{\nu} \psi_\nu = 0$.

Для $\nu = 2, 3, \dots$ рассмотрим разности

$$\delta_\nu = \frac{\alpha(\gamma_\nu) - K}{\gamma_\nu} - \frac{\alpha(\gamma_{\nu-1}) - K}{\gamma_{\nu-1}} = \frac{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu \gamma_{\nu-1}} \left(K - \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}} \right).$$

Пусть $K \in [0; M)$. Если значение $\nu_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\psi_{\nu_0} \leq K \leq \psi_{\nu_0+1},$$

тогда для $\nu \leq \nu_0$ будет $\delta_\nu \geq 0$, а для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu < 0$. Отсюда следует, что

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - K}{\gamma_\nu} \right) = \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}}.$$

Отметим, что для $K = \psi_{\nu_0}$

$$\frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0-1})\gamma_{\nu_0} - \alpha(\gamma_{\nu_0})\gamma_{\nu_0-1}}{\gamma_{\nu_0}(\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1})} = \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - \alpha(\gamma_{\nu_0-1})}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}},$$

а при $K = \psi_{\nu_0+1}$

$$\frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0})\gamma_{\nu_0+1} - \alpha(\gamma_{\nu_0+1})\gamma_{\nu_0}}{\gamma_{\nu_0}(\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0})} = \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0+1}) - \alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}.$$

Обозначим через $l(K)$ ломаную с узлами в точках ψ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, которая в узлах интерполирует значения

$$\frac{\alpha(\gamma_\nu) - \alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива

Теорема 1. При сделанных выше предположениях относительно функций f , φ и α для любого $K \in [0; M)$ и всех $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2. \quad (2.1)$$

Покажем, что константа $l(K)$ для любого $K \in [0; M)$ неулучшаема. Возьмем произвольное $K \in [0; M)$ и выберем $\nu_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\psi_{\nu_0} \leq K \leq \psi_{\nu_0+1}$. Для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi(\nu_0)|^2 = \alpha(|f(\nu_0)|^2) = \\ &= K\|e_{\nu_0}\|^2 + \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}}|f(\nu_0)|^2 = \\ &= K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2. \end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. Харди Г. Г. Неравенства. / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа - М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. - 456 с.
2. Babenko V. F.. On Exact Inequalities of Hardy-Littlewood-Polya Type / V. F. Babenko, T. M Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applications, 2000. — 245. — P. 570–593.
3. Бабенко В. Ф. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. - К. : Наук. думка, 2003. — 590 с.
4. Бабенко В.Ф. Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, Н.А. Крячко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2013. - Т. 21, № 6/1. - С. 34-39.

Надійшла до редколегії 12.05.2014