ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія « Математика». № 6/1. 2011. Вип.16.

УДК 517.5

В.Л. Великин
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ВЗАИМНОМ УКЛОНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ ПО РАЗНЫМ СЕТКАМ УЗЛОВ

Отримано точні значення інтерполяційних розхилів деяких підпросторів ермітових сплайнів за різними сітками вузлів на множинах неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: розхил, підпростір, сплайни.

Получены точные значения интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов по разным сеткам узлов на множествах непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: раствор, подпространство, сплайны.

We obtain exact values on the interpolatory openings of certain subspaces of Hermitian splines for different knots over sets of continuosly differentiable functions.

Key words: openings, subsets, splines.

Пусть C^q, $q = 0,1,2,\ldots,$ – линейное нормированное пространство функций $f(x)$, имеющих на промежутке $[0,1]$ q непрерывных производных с нормой

$$\| f \|^{(q)} = \sum_{i=0}^{q} \| f^{(i)} \|_{C_{[0,1]}}, \quad \| f \|^{(0)} = \| f \|.$$

Пусть еще $\Delta_\nu = \{x_i^\nu\}_{i=0}^{\nu}$, $0 = x_0^\nu < x_1^\nu < \ldots < x_\nu^\nu = 1$, $\nu \ge 1$, – произвольное разбиение промежутка $[0,1]$ узлами x_i^ν.

Положим $h_i^\nu = x_i^\nu - x_{i-1}^\nu$, $\delta^\nu = \max\{h_i^\nu : i = \overline{1,n}\}$, $\delta_i^\nu = (x_{i-1}, x_i)$ и $\bar{\delta}_i^\nu = [x_{i-1}^\nu, x_i^\nu]$.

Каждой функции $f \in C^q$ поставим в соответствие интерполяционный эрмитовый сплайн порядка $2m+1$, $m = 0,1,2,\ldots$, вида

$$s_{r,m}(f,\Delta_\nu;x) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(x_{i-1}^\nu) H_{k,m}(h_i^\nu; x - x_{i-1}^\nu) + (-1)^k f^{(k)}(x_i^\nu) H_{k,m}(h_i^\nu; x_i^\nu - x),$$

$$x \in \bar{\delta}_i^\nu, \quad i = \overline{1,n}, \quad q,m \ge r, \quad \text{и}$$

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s! h^{k+s+1}} t^{k+s}. \tag{1}$$

Подпространство таких сплайнов при фиксированных m, r и Δ_ν обозначим через $S_{r,m}(\Delta_\nu)$.

В [1-3] исследовалась величина, представляющая собой, так называемый, интерполяционный раствор пары подпространств эрмитовых сплайнов по одному и тому же набору узлов. Здесь мы продолжаем исследование аналогичной величины для подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов уже по различным наборам узлов.

А именно, положим

$$\Theta_{r,p}\left[S_{r_1,m_1}(\Delta_{\nu_1});\, S_{r_2,m_2}(\Delta_{\nu_2})\right] = \sup_{\|f\|^{(r)}\le 1}\left\| s_{r_1,m_1}(f,\Delta_{\nu_1};x) - s_{r_2,m_2},(f,\Delta_{\nu_2};x)\right\|_p, \qquad (2)$$

где $r \ge 0$, а $\|\cdot\|_p$ – это норма пространства $L_p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$.

В случае $r_1 = r_2 = 0$ левую часть предыдущего равенства будем обозначать через $\Theta_{r,p}\left[(m_1,\nu_1);\,(m_2,\nu_2)\right]$.

Положим еще

$$e_{\nu_1,\nu_2}^{m_1,m_2} = s_{0,m_1}(f,\Delta_{\nu_1};x) - s_{0,m_2},(f,\Delta_{\nu_2};x).$$

В дальнейшем мы здесь используем две леммы из [1], которые сформулируем ниже.

Лемма А. $$\lim_{m\to\infty} H_{0,m}(h;t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < h/2, \\ 1/2, & t = h/2, \\ 0, & h/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Лемма В. Для любых x, $x + h \in [0,1]$, справедливо равенство

$$\sup\left\{|\, f(x) - f(x+h)\,|:\quad \|\, f\,\|^{(1)} \le 1\right\} = 2h(2+h\ )^{-1} := a(h).$$

Теорема 1. *Для любых* $m_i \ge 0$, $\nu_i \ge 1$, $i = 1,2$, $\nu_1 \ne \nu_2$, *имеет место равенство*

$$\Theta_{0,\infty}\left[(m_1,\nu_1);\,(m_2,\nu_2)\right] = 2.$$

Доказательство. Как уже отмечалось в [1] (см. также [2]),

$$H_{k,m}^{(j)}(h;0) = \delta_{k,j},\ H_{k,m}^{(j)}(h;h) = 0,\ j = \overline{0,m}, \text{ и}$$

$$H_{0,m}(h;t) + H_{0,m}(h;h-t) \equiv 1, \qquad (3)$$

а также

$$\frac{h-t}{h} = H_{0,0}(h;t) < H_{0,m}(h;t) < H_{0,m+1}(h;t) < 1,\ t \in (0,h/2),\ m \in \mathbf{N}. \qquad (4)$$

Откуда вытекает следующее соотношение для $x \in \bar{\delta}_i^{\nu}$, $i = \overline{1,n}$, :

$$-1 \le \min\left\{f(x_{i-1}^{\nu}), f(x_i^{\nu})\right\} \le s_{0,m}(f,\Delta_\nu;x) \le \max\left\{f(x_{i-1}^{\nu}), f(x_i^{\nu})\right\} \le 1.$$

Поэтому

$$\|\, e_{\nu_1,\nu_2}^{m_1,m_2}(f;x)\,\|_\infty \le 2.$$

Поскольку $\Delta_{\nu_1} \ne \Delta_{\nu_2}$, то один из интервалов этих двух разбиений содержит узлы другого разбиения. Пусть, например, интервал $\delta_j^{\nu_1}$ содержит узел $x_i^{\nu_2}$. Тогда для функции $f_0 \in C$, представляющей собой ломаную с изломами в точках $x_{j-1}^{\nu_1}$, $x_i^{\nu_2}$, $x_j^{\nu_1}$ и такой, что $f_0(0) = f_0(x_{j-1}^{\nu_1}) = f_0(x_j^{\nu_1}) = f_0(1) = -1$, $f_0(x_i^{\nu_2}) = 1$, имеем

$$\| e^{m_1,m_2}_{\nu_1,\nu_2}(f_0;x) \|_{C[\bar{\delta}^{\nu_1}_j]} = \| -1 - s_{0,m_2}(f_0,\Delta_{\nu_2};x) \|_{C[\bar{\delta}^{\nu_1}_j]} \geq$$
$$\geq | -1 - s_{0,m_2}(f_0,\Delta_{\nu_2};x^{\nu_2}_i) | = | -1 - f_0(x^{\nu_2}_i) | = 2 .$$

Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим два произвольных разбиения Δ_n и Δ_{n+s}, $s \geq 1$, таких, что $\Delta_n \subset \Delta_{n+s}$. Обозначим через $\omega_1 = \omega_1(\Delta_n)$ – множество индексов j тех интервалов δ^n_j, которые не содержат узлов Δ_{n+s}, а через $\omega_2 = \omega_2(\Delta_n)$ множество $\{1,2,...,n\} \setminus \omega_1$. Для $j \in \omega_2$ положим

$$\bar{x}^{n+s}_j = \min \left\{x^{n+s}_i : \ x^n_{j-1} < x^{n+s}_i < x^n_j\right\}, \quad \bar{\bar{x}}^{n+s}_j = \max \left\{x^{n+s}_i : \ x^n_{j-1} < x^{n+s}_i < x^n_j\right\}.$$

Здесь нам понадобится еще функция φ_m из [1]

$$\varphi_m(t) = H_{0,m+1}(1;t) - H_{0,m}(1;t) = C^m_{2m+1} t^{m+1}(1-t)^{m+1}(1-2t) , \qquad (5)$$

для которой

$$\int_0^{1/2} \varphi_m(t)dt = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+2} m!(m+2)!} := \Phi(m) .$$

Теорема 2. *Для любых* $m_i \geq 0$, $i = 1,2$, *и* $\Delta_n \subset \Delta_{n+s}$, $s \geq 1$, *имеет место равенство*

$$\Theta_{0,1}[(m_1,n);(m_2,n+s)] = \sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \Phi(m_1+\mu-1) \sum_{j\in\omega_1} h^n_j + \sum_{j\in\omega_2} (h^n_j + \bar{\bar{x}}^{n+s}_j - \bar{x}^{n+s}_j) .$$

Доказательство. Пусть сначала интервал δ^n_j не содержит узлов разбиения Δ_{n+s}, т.е. $j \in \omega_1$. В этом случае поступим, с учетом соотношений (4) и (1), так же, как и при доказательстве теоремы 4 из [1]. А именно,

$$\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j} | e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x) | dx \leq 2 \int_0^{h^n_j} | H_{0,m_2}(h^n_j;t) - H_{0,m_1}(h^n_j;t) | dt =$$

$$= 2 \sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \int_0^{h^n_j} | H_{0,m_1+\mu}(h^n_j;t) - H_{0,m_1+\mu-1}(h^n_j;t) | dt = 4h^n_j \sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \int_0^{1/2} \varphi_{m_1+\mu-1}(t) dt =$$

$$= h^n_j \sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \Phi(m_1+\mu-1) . \qquad (6)$$

Знак равенства в соотношении (6) достигается для непрерывной функции, которая в узлах x^n_{j-1}, x^n_j принимает значения -1 и 1 соответственно (или 1 и -1). Если же интервал δ^n_j содержит узлы разбиения Δ_{n+s}, т.е. $j \in \omega_2$, то

$$\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j} | e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x) | dx \leq 2 \int_{x^n_{j-1}}^{\bar{x}^{n+s}_j} \frac{x - x^n_{j-1}}{\bar{x}^{n+s}_j - x^n_j} dx + 2 \int_{\bar{x}^{n+s}_j}^{\bar{\bar{x}}^{n+s}_j} dx + 2 \int_{\bar{\bar{x}}^{n+s}_j}^{x^n_j} \frac{x^n_j - x}{x^n_j - \bar{\bar{x}}^{n+s}_j} dx =$$

$$= h^n_j + \bar{\bar{x}}^{n+s}_j - \bar{x}^{n+s}_j . \qquad (7)$$

Причем знак равенства реализует непрерывная функция, которая в точках x_{j-1}^n, $\overline{x}_j^{n+s}$, $\overline{\overline{x}}_j^{n+s}$, x_j^n принимает значения -1, 1, 1 и -1 соответственно (или 1, -1, -1 и 1).

Остается отметить, что функция $f \in C$, которая реализует знак равенства в (6) на каждом промежутке $\overline{\delta}_j^n$, для $j \in \omega_1$, и в (7), для $j \in \omega_2$, будет экстремальной на всем промежутке $[0,1]$.

Следствие. Имеет место соотношение

$$\sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \Phi(m_1+\mu-1) \sum_{j\in\omega_1} h_j^n + \sum_{j\in\omega_2} h_j^n \le \Theta_{0,1}[(m_1,n);\,(m_2,n+s)] <$$

$$< \sum_{\mu=1}^{m_2-m_1} \Phi(m_1+\mu-1) \sum_{j\in\omega_1} h_j^n + 2\sum_{j\in\omega_2} h_j^n .$$

В частности, если каждый интервал δ_j^n содержит узлы разбиения Δ_{n+s}, то

$$1 \le \Theta_{0,1}[(m_1,n);\,(m_2,n+s)] < 2 .$$

Причем константа 2 справа не уменьшаема на множестве всех разбиений Δ_{n+s}. А если каждый интервал δ_j^n содержит в точности один узел разбиения Δ_{2n}, то

$$\lim_{m_1,m_2\to\infty} \Theta_{0,1}[(m_1,n);\,(m_2,n+s)] = 1 .$$

Теорема 3. *Для любых* $m_i \ge 0$, $i=1,2$, $\Delta_n \subset \Delta_{n+s}$ *и* $p \ge 1$,

$$\lim_{m_1,m_2\to\infty} \Theta_{0,p}[(m_1,n);\,(m_2,n+s)] \le \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j\in\omega_1} (h_j^n)^{p+1} + 2^p \sum_{j\in\omega_2} h_j^n \right)^{\frac{1}{p}},$$

причем правая часть неуменьшаема на множестве всех разбиений Δ_{n+s}, *имеющих одно и то же фиксированное множество* ω_1. *В частности,*

$$\sup_{\Delta_{n+s}} \lim_{m_1,m_2\to\infty} \Theta_{0,p}[(m_1,n);\,(m_2,n+s)] = 2 ,$$

если точная верхняя грань берется по всевозможным разбиениям Δ_{n+s}, *у которых не менее двух узлов содержится в каждом интервале* δ_j^n, *и*

$$\sup_{\Delta_{2n}} \lim \Theta_{0,p}[(m_1,n);\,(m_2,2n)] = 1,$$

если точная верхняя грань берется по всевозможным разбиениям Δ_{2n}, *у которых по одному узлу содержится в каждом интервале* δ_j^n.

Доказательство.

$$\int_0^1 | e_{n,n+s}^{m_1,m_2}(f;x)|^p\, dx = \left(\sum_{j\in\omega_1} + \sum_{j\in\omega_2} \right) \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | e_{n,n+s}^{m_1,m_2}(f;x)|\, dx \le$$

$$\le \sum_{j\in\omega_1} | f(x_j^n) - f(x_{j-1}^n) |^p \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | H_{0,m_1}(h_j^n; x_j^n - x) - H_{0,m_2}(h_j^n; x_j^n - x) |^p dx + 2^p \sum_{j\in\omega_2} h_j^n \le$$

$$\le \sum_{j\in\omega_1} 2^p \cdot 2 \int_0^{h_j^n/2} t^p dt + 2^p \sum_{j\in\omega_2} h_j^n = \frac{1}{p+1} \sum_{j\in\omega_1} (h_j^n)^{p+1} + 2^p \sum_{j\in\omega_2} h_j^n .$$

С другой стороны, если каждый интервал δ_j^n, для $j \in \omega_2$, содержит узлы $x_{j-1}^n + \varepsilon$, $x_j^n - \varepsilon$, то с учетом леммы А, при $\varepsilon \to \infty$, получим

$$\lim_{m_1, m_2 \to \infty} \cdot \sup_{\|f\| \le 1} \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | e_{n,n+s}^{m_1, m_2}(f; x) |^p dx > 2^p \left(h_j^n - 2\varepsilon \right) = 2^p h_j^n + O(\varepsilon).$$

Тем самым первые два соотношения данной теоремы доказаны. Для доказательства третьего поступим аналогично. Пусть $x_i^{2n} \in \delta_j^n$. Тогда $x_{j-1}^n = x_{2j-2}^{2n}$, $x_i^{2n} = x_{2j-1}^{2n}$, $x_j^n = x_{2j}^{2n}$ и

$$\int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | e_{n,2n}^{m_1, m_2}(f; x) |^p dx = \left(\int_{x_{2j-2}^{2n}}^{x_{2j-1}^{2n}} + \int_{x_{2j-1}^{2n}}^{x_{2j}^{2n}} \right) | e_{n,2n}^{m_1, m_2}(f; x) |^p dx \le \frac{1}{2} \int_0^{h_{2j-1}^{2n}/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{h_{2j}^{2n}/2} dx = h_j^n .$$

Остается воспользоваться леммой А. Теорема 3 доказана.

Перейдем теперь к оценке величины $e_{n,n+s}^{m_1, m_2}(f; x)$ на множестве функций $f \in C^1$ с $\| f \|^{(1)} \le 1$.

Если интервал δ_j^n не содержит узлов разбиения Δ_{n+s}, то тогда, в силу теорем 1 и 2 из [1], имеем следующие соотношения:

$$\frac{\sqrt{3} h_j^n}{9(2 + h_j^n)} \le \sup_{\|f\|^{(1)} \le 1} \| e_{n,n+s}^{m,0}(f; x) \|_{C[\delta_j^n]} \le \frac{h_j^n}{2 + h_j^n} = \lim_{m \to \infty} \| e_{n,n+s}^{m,0}(f; x) \|_{C[\delta_j^n]},$$

$$\sup_{\|f\|^{(1)} \le 1} \| e_{n,n+s}^{m_1, m_2}(f; x) \|_{C[\delta_j^n]} \le \frac{h_j^n}{2 + h_j^n} \text{ и } \sup_{\|f\|^{(1)} \le 1} \| e_{n,n+s}^{m_1, m+1}(f; x) \|_{C[\delta_j^n]} = \frac{h_j^n}{2 + h_j^n} \| \varphi_m \|_{C[0,1]},$$

где φ_m – функция, определенная равенством (5).

Пусть теперь $j \in \omega_2$, т. е. интервал δ_j^n содержит узлы разбиения Δ_{n+s}. Обозначим через $\tilde{x}_j^{n+s}$ тот из них, который ближе других расположен к точке $x_{j-0,5}^n = \dfrac{x_{j-1}^n + x_j^n}{2}$, и пусть, для определенности, $x_{j-0,5}^n \le \tilde{x}_j^{n+s}$.

Рассмотрим сначала случай $m_1 = m_2 = 0$. Обозначим через $l_{j,n+s}$ – ломаную с изломом в точке $\tilde{x}_j^{n+s}$ и принимающую в точках x_{j-1}^n, $\tilde{x}_j^{n+s}$, x_j^n значения, равные соответственно 0, $\tilde{y}_j^{n+s} = a(\tilde{h}_j^n)$, $y_j^n = a(\tilde{h}_j^n) - a(h_j^n - \tilde{h}_j^n)$, где

$\widetilde{h}_j^n = \widetilde{x}_j^{n+s} - x_{j-1}^n$. А через $l_{j,n}$ – линейную на промежутке $\overline{\delta}_j^n$ функцию, принимающую на его концах те же значения, что и функция $l_{j,n+s}$. Тогда, в силу леммы В, приходим к неравенству

$$\max_{x\in\delta_j^n} |e_{n,n+s}^{0,0}(f;x)| \le |l_{j,n}(\widetilde{x}_j^{n+s}) - l_{j,n+s}(\widetilde{x}_j^{n+s})| = a(\widetilde{h}_j^n) - \frac{\widetilde{h}_j^n}{h_j^n}\left(a(\widetilde{h}_j^n) - a(h_j^n - \widetilde{h}_j^n)\right).$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее вспомогательное утверждение об одном свойстве функции a из леммы В.

Лемма 1. Для любых h и h_1, $\frac{h}{2} \le h_1 \le h$, справедливо неравенство

$$a(h_1) - \frac{h_1}{h}\left(a(h_1) - a(h-h_1)\right) \le a\left(\frac{h}{2}\right).$$

Доказательство. Левую часть этого неравенства после элементарных преобразований запишем как функцию g переменного h_1 при фиксированном h:

$$g(h_1) = \frac{2h_1(h-h_1)(4+h)}{h(2+h_1)(2+h-h_1)}.$$

Эта функция убывает на промежутке $[\frac{h}{2}, h]$. Поэтому

$$\max_{h_1\in[\frac{h}{2},h]} g(h_1) = g\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2h}{4+h} = a\left(\frac{h}{2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

На основании этой леммы заключаем, что

$$\sup_{\|f\|^{(1)}\le 1} \| e_{n,n+s}^{0,0}(f;x) \|_{C[\overline{\delta}_j^n]} \le \frac{2h_j^n}{4+h_j^n}.$$

Причем знак равенства достигается в случае, когда узел $\widetilde{x}_j^{n+s} = x_{j-0,5}^n$.

Рассмотрим теперь случай $m_2 = 0$, $m_1 = m > 0$. С учетом свойств (3) и (4) функции $H_{0,m}$, в предположении, что $x_{j-0,5}^n \le \widetilde{x}_j^{n+s}$, находим

$$\max_{x\in[x_{j-0,5}^n, x_j^n]} |e_{n,n+s}^{m,0}(f;x)| \le | y_j^n H_{0,m}(h_j^n;\widetilde{x}_j^{n+s}) - l_{j,n+s}(\widetilde{x}_j^{n+s})| \le$$

$$\le |l_{j,n}(\widetilde{x}_j^{n+s}) - l_{j,n+s}(\widetilde{x}_j^{n+s})| \le \frac{2h_j^n}{4+h_j^n}.$$

А для $x \in [x_{j-1}^n, x_{j-0,5}^n]$ имеем

$$\max_{x\in[x_{j-1}^n, x_{j-0,5}^n]} |e_{n,n+s}^{m,0}(f;x)| \le |l_{j,n+s}(x_{j-0,5}^n)| \le \frac{2h_j^n}{4+h_j^n}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\|f\|^{(1)}\le 1} \| e^{m,0}_{n,n+s}(f;x)\|_{C[\bar\delta^n_j]} \le \frac{2h^n_j}{4+h^n_j}, \tag{8}$$

причем знак равенства достигается, когда узел $\tilde{x}^{n+s}_j = x^n_{j-0,5}$.

Соотношение (8) остается справедливым и в случае $m_i \ge 0$, $i=1,2$, при условии, что для $j=\overline{1,n}$ в интервале δ^n_j узел $\tilde{x}^{n+s}_j$ совпадает с точкой $x^n_{j-0,5}$.

Наконец, в случае $m_i \ge 0$, $i=1,2$, с учетом леммы А, имеем

$$| e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x)| < a(\tilde{h}^n_j) \le a(h^n_j) = \frac{2h^n_j}{2+h^n_j} \le \frac{2\delta^n}{2+\delta^n}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Для любых* $m_i \ge 0$, $i=1,2$,

$$\sup_{\Delta_{n+s}} \Theta_{1,\infty}[(m_1,n);(m_2,n+s)] = \frac{2\delta^n}{2+\delta^n}.$$

В случае же, когда $m_2 = 0$,

$$\sup_{\Delta_{n+s}} \Theta_{1,\infty}[(m_1,n);(0,n+s)] = \frac{2\delta^n}{4+\delta^n},$$

причем точная верхняя грань реализуется на разбиениях Δ_{n+s}, *у которых в каждом интервале* δ^n_j *содержится по узлу, совпадающему с точкой* x^n_{j-1}. *В случае разбиения* Δ_n *с равноотстоящими узлами правые части в двух предыдущих равенствах равны* $\frac{1}{n+0,5}$ *и* $\frac{1}{2n+0,5}$ *соответственно.*

Теорема 5. *Для любых* $m_i \ge 0$, $i=1,2$, *и* $\Delta_n \subset \Delta_{n+s}$ *справедливо следующее соотношение*

$$\sup_{\Delta_{n+s}} \Theta_{1,1}[(m_1,n);(m_2,n+s)] = 2 - 8\ln\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{h^n_j}{4}\right) < \sum_{j=1}^{n}(h^n_j)^2. \tag{9}$$

В частности, при $s=n$, *и все* δ^n_j *содержат по узлу разбиения* Δ_{2n},

$$\Theta_{1,1}[(m_1,n);(m_2,2n)] = \sum_{j=1}^{n}\frac{(h^n_j)^2}{4+h^n_j}. \tag{10}$$

Если же $h^n_j = \frac{1}{n}$, $j=\overline{1,n}$, *то правые части в (9) и (10) можно заменить на* $\frac{1}{4n}$ *и* $\frac{1}{4n+1}$ *соответственно.*

Доказательство. Из тождества (3) имеем для любых $m>0$ и $s \ge 0$

$$\int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} s_{0,m}(f,\Delta_{n+s};x)dx = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} s_{0,0}(f,\Delta_{n+s};x)dx. \tag{11}$$

Поэтому, в случае, когда интервал δ_j^n содержит один узел $\widetilde{x}_j^{n+s}$ разбиения Δ_{n+s}, с учетом леммы 1 и обозначений, введенных выше, находим

$$\int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | e_{n,n+s}^{m_1,m_2}(f;x) | dx = \int_{x_{j-1}^n}^{x_j^n} | e_{n,n+s}^{0,0}(f;x) | dx = | l_{j,n}(\widetilde{x}_j^{n+s}) - l_{j,n+s}(\widetilde{x}_j^{n+s}) | \cdot \frac{h_j^n}{2} \le$$

$$\le a\left(\frac{h_j^n}{2}\right) \cdot \frac{h_j^n}{2} = \frac{h_j^n}{4+h_j^n}.$$

Тем самым вторая часть этой теоремы доказана. Далее нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение. Для $\frac{h}{2} \le \beta \le h$ положим

$$\omega(h,\beta;x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{2+x}, & 0 \le x \le \beta, \\ \dfrac{2(h-x)}{2+h-x} + 4\dfrac{2\beta-h}{(2+\beta)(2+h-\beta)}, & \beta \le x \le h, \end{cases}$$

и

$$l(h,\beta;x) = \frac{4x}{h} \cdot \frac{2\beta-h}{(2+\beta)(2+h-\beta)}.$$

Лемма 2. $\int_0^h (\omega(h,\beta;x) - l(h,\beta;x))dx \le \int_0^h \omega\left(h,\frac{h}{2};x\right)dx = 2h - 8\ln\left(1+\frac{h}{4}\right) < h^2$.

Доказательство. Легко вычислить

$$\int_0^h (\omega(h,\beta;x) - l(h,\beta;x))dx =$$

$$= 2h + 8\ln 2 - 2\left(2\ln(2+\beta)(2+h-\beta) + \frac{(2\beta-h)^2}{(2+\beta)(2+h-\beta)}\right).$$

Правая часть этого равенства при фиксированном h представляет собой функцию переменной β. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта функция убывает на промежутке $[\frac{h}{2}, h]$, что и доказывает лемму 2.

Заметим, что $\omega(h,\beta;h) = 4 \cdot \dfrac{2\beta-h}{(2+\beta)(2+h-\beta)}$

при фиксированном h представляет собой непрерывную функцию переменной β, которая на промежутке $[\frac{h}{2},h]$ строго возрастает от значения $\omega\left(h,\frac{h}{2};h\right)=0$ до значения $\omega(h,h;h)=\frac{2h}{2+h}$. Поэтому любому значению $y\in[0,\frac{2h}{2+h}]$ отвечает единственное значение $\beta=\beta(y)$ такое, что $\omega(h,\beta(y);h)=y$.

Перейдем теперь к доказательству первой части теоремы (5). Пусть $f\in C^1$ и $\|f\|^{(1)}\le 1$. Для фиксированных j, $j=\overline{1,n}$, при рассмотрении функции $e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x)$ можно, не уменьшая общности, считать, что $f(x^n_{j-1})=0$, $f(x^n_j)=y^n_j\ge 0$. Воспользуемся равенством (11) и утверждениями леммы В и леммы 2:

$$\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j}|e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x)|\,dx=\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j}|\omega(h^n_j,\beta(y^n_j);x)-l(h^n_j,\beta(y^n_j);x)|\,dx\le$$

$$\le\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j}\omega\left(h^n_j,\frac{h^n_j}{2};x\right)dx=2h^n_j-8\ln\left(1+\frac{h^n_j}{4}\right)<(h^n_j)^2.$$

Откуда получаем оценку сверху

$$\int_0^1|e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x)|\,dx\le\sum_{j=1}^{n}\left(2h^n_j-8\ln\left(1+\frac{h^n_j}{4}\right)\right)=2-8\ln\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{h^n_j}{4}\right)<$$

$$<\sum_{j=1}^{n}(h^n_j)^2.$$

С другой стороны, при $\delta^{n+s}\to 0$, $s\to\infty$,

$$\sup\left\{\int_0^1|e^{m_1,m_2}_{n,n+s}(f;x)|\,dx : f\in C^1,\ \|f\|^{(1)}\le 1,\ f(x^n_j)=0\right\}\to\sum_{j=1}^{n}\int_{x^n_{j-1}}^{x^n_j}\omega\left(h^n_j,\frac{h^n_j}{2};x\right)dx.$$

Таким образом, теорема 5 доказана.

Библиографические ссылки

1.Великин В.Л. Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов / В.Л. Великин // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2009, – Т.17, №6/1, вип. 14, С.54–56.

2.Великин В.Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классе дифференцируемых функций / В.Л. Великин // Изв. АН СССР. Серия математическая, – 1973.–37, – С.165 –185.

Надiйшла до редколегiї 10.01.11