УДК 517.5

Т.Ю. Лескевич

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

АСИМПТОТИКА L_p-ПОГРЕШНОСТИ ПРИ АДАПТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ n-ПЕРЕМЕННЫХ

Знайдена точна асимптотика L_p-похибки при апроксимації гармонічними сплайнами двічі неперервно диференційовної функції, яка означена на одиничному n-вимірному кубі. Побудована асимптотично оптимальна послідовність розбиттів.

Ключові слова: сплайн, гармонічна функція, апроксимація, похибка.

Найдена точная асимптотика L_p-погрешности при аппроксимации гармоническими сплайнами дважды непрерывно дифференцируемой функции, заданной на единичном n-мерном кубе. Построена асимптотически оптимальная последовательность разбиений.

Ключевые слова: сплайн, гармоническая функция, аппроксимация, погрешность.

For twice continuously differentiable defined on n-dimensional cube function sharp asymptotics of L_p-error for approximation by harmonic splines is obtained. The asymptotically optimal sequence of partitions is constructed.

Key words: spline, harmonic function, approximation, error.

Постановка задачи. Ранее был получен ряд результатов, связанных с адаптивной интерполяцией полиномиальными сплайнами, в частности, для функций многих переменных можно привести результаты [3; 4] в случае приближения линейными сплайнами и [6] в случае приближения полиномиальными сплайнами более высоких порядков. Результат по адаптивной аппроксимации гармоническими сплайнами функций двух переменных содержится в [5]. Данная работа является обобщением последнего результата на случай функций n-переменных, $n \ge 2$.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ точек $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ задан единичный n-мерный куб $\mathbf{I}^n := [0,1]^n \subset \mathbf{R}^n$. Пусть также $P_N = \{\overline{\Omega}_i\}_{i=1}^N$ – разбиение $\mathbf{I}^n$ на N множеств $\overline{\Omega}_i$, внутренность которых обозначим через Ω_i, а границу через $\partial\Omega_i$. Следовательно $\mathbf{I}^n = \bigcup_{i=1}^N \overline{\Omega}_i$, причем, $\overline{\Omega}_i$ и $\overline{\Omega}_j$ при $i \ne j$ не имеют общих внутренних точек.

Введем стандартные обозначения: $C(\Omega)$ – пространство непрерывных в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ функций, $C^2(\Omega)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых в Ω функций и $L_p(\Omega), 1 \le p < \infty$ – пространство измеримых и интергрируемых в степени p функций $f : \Omega \to \mathbf{R}$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $H(\Omega)$ множество всех гармонических в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ функций, то есть

$$H(\Omega) = \left\{ u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) : \Delta u(\mathbf{x}) = 0 \right\},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласса.

Теперь для заданного разбиения P_N рассмотрим множество $S(P_N)$ непрерывных на $\mathbf{I}^n$ функций, сужение каждой из которых на области $\Omega_i \in P_N$ представляет собой гармоническую функцию, то есть

$$S(P_N) = \left\{ g \in C(\mathbf{I}^n) : g|_{\Omega_i} = u_i|_{\Omega_i}, \; u_i \in H(\Omega_i), \; i = 1,\ldots,N \right\}.$$

В дальнейшем, функции из множества $S(P_N)$ будем называть гармоническими сплайнами.

Пусть далее задана функция $f \in C^2(\mathbf{I}^n)$, которой мы поставим в соответствие гармонический сплайн $s(f, P_N) \in S(P_N)$ так, чтобы их значения на границе областей Ω_i совпадали. Таким образом, функция $s(f, P_N)$ в каждой области Ω_i должна удовлетворять условиям

$$\Delta s(f, P_N; \mathbf{x}) = 0, \; \mathbf{x} \in \Omega_i,$$
$$s(f, P_N; \mathbf{x})|_{\partial\Omega_i} = f(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_i}.$$

Другими словами, функция $s(f, P_N)$ в каждой области из разбиения P_N должна быть решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласса, которое как известно [1, с. 86, 89] для любой функции $f(\mathbf{x})$, непрерывной на $\partial\Omega_i$, существует и единственно. Значит, для заданной функции $f \in C^2(\mathbf{I}^n)$ гармонический сплайн $s(f, P_N)$ определяется однозначно на $\mathbf{I}^n$.

В дальнейшем мы будем рассматривать такие разбиения P_N, элементы которых представляют собой n-мерные кубы, полученные в результате гомотетии и сдвига $\mathbf{I}^n$, за исключением быть может, не более чем $o(N)$ при $N \to \infty$ элементов, представляющих собой n-мерные параллелепипеды.

Определим оптимальную погрешность приближения гармоническими сплайнами в норме пространств $L_p(\mathbf{I}^n), 1 \le p < \infty$ следующим образом

$$R_N(f, L_p) = \inf_{P_N} \|f - s(f, P_N)\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}.$$

В данной работе преследуются две цели: построение асимтотически оптимальной последовательности разбиений $\{P_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, которая обеспечит выполнение следующего условия

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}}{R_N(f, L_p)} = 1,$$

и определение точной асимптотики погрешности $\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}$ на построенной последовательности разбиений при $N \to \infty$.

Для того, чтобы сформулировать основной результат данной статьи, введем дополнительные обозначения. Через $G_\Omega(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ при $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \Omega$ обозначим функцию Грина внутренней задачи Дирихле для области Ω [1, с. 83]. Также обозначим через

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{I}^n} G_{\mathbf{I}^n}(\mathbf{x}; \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{I}^n. \tag{1}$$

Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in C^2(\mathbf{I}^n)$ *существует такая последовательность* $\{P_N^*\}_{N=1}^{\infty}$, *что*

$$\lim_{N\to\infty} N^{2/n} \left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)} = \left\|I\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)} \left\|\Delta f\right\|_{L_{\frac{np}{2p+n}}(\mathbf{I}^n)}.$$

Вспомогательные результаты. Для некоторой функции $g \in C(\mathbf{I}^n)$ определим модуль непрерывности следующим образом

$$\omega(g, \delta) = \sup\{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}')| : |x_1 - x_1'| \le \delta, \ldots, |x_n - x_n'| \le \delta,\ \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{I}^n\}.$$

Тогда для заданной функции $f \in C^2(\mathbf{I}^2)$ рассмотрим величину

$$\omega(\delta) = \max_{1 \le i,j \le n} \left\{ \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \delta \right) \right\}. \tag{2}$$

Лемма 1. Пусть задана функция $f \in C^2(\mathbf{I}^n)$ и пусть $P_2(\mathbf{x}) = P_2(f; \mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ ее полином Тейлора второго порядка, построенный в точке $\mathbf{x}_0$, которая является центром некоторого n-мерного куба $D_h \subset \mathbf{I}^n$ с ребром длины h, тогда

$$|f(\mathbf{x}) - P_2(\mathbf{x})| \le \frac{h^2}{2} \omega\left(\frac{h}{2}\right), \qquad \mathbf{x} \in D_h. \tag{3}$$

Доказательство леммы 1 не представляет сложности. Идею доказательства можно посмотреть, например, в [4].

Обозначим через $\Omega + d$ область, которая образуется при сдвиге области Ω на вектор $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$, а через $\alpha\Omega$ – область, которая является гомотетией области Ω с коэффициентом α.

Лемма 2. Справедливы следующие свойства функции Грина:

$$G_{\alpha\Omega}(\mathbf{x};\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha^{n-2}} G_\Omega\left(\frac{\mathbf{x}}{\alpha};\frac{\mathbf{v}}{\alpha}\right),\ \ \mathbf{x},\mathbf{v} \in \alpha\Omega, \tag{4}$$

$$G_{\Omega+d}(\mathbf{x};\mathbf{v}) = G_\Omega(\mathbf{x}-\mathbf{d};\mathbf{v}-\mathbf{d}),\ \ \mathbf{x},\mathbf{v} \in \Omega + d. \tag{5}$$

Результат леммы 2 непосредственно следует из известного выражения функции Грина через фундаментальное решение уравнения Лапласа [1, с. 83].

Далее рассмотрим n-мерный куб $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ со сторонами параллельными осям координат, на котором зададим функцию

$$Q(\mathbf{x}) = A_1 x_1^2 + .. + A_n x_n^2. \tag{6}$$

В пространстве $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ найдем величину отклонения функции $Q(\mathbf{x})$ от гармонической в области Ω функции $u(Q;\mathbf{x})$, значения которой на границе Ω совпадают с соответствующими значениями функции $Q(\mathbf{x})$. То есть функция $u(Q;\mathbf{x})$ должна быть решением следующей краевой задачи

$$\Delta u(Q;\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7}$$

$$u(Q;\mathbf{x})\,|_{\partial\Omega} = Q(\mathbf{x})\,|_{\partial\Omega}. \tag{8}$$

Лемма 3. Для функции $Q(\mathbf{x}) = A_1 x_1^2 + .. + A_n x_n^2$ в случае, когда $\Delta Q(\mathbf{x}) \ne 0$, имеет место следующее равенство

$$\left\|Q - u(Q)\right\|_{L_p(\Omega)} = 2\,|\,A_1 + ... + A_n\,| \cdot |\,\overline{\Omega}\,|^{\frac{2}{n}+\frac{1}{p}} \left\|I\right\|_{L_p(I^n)}, \tag{9}$$

где $|\,\overline{\Omega}\,|$ – площадь $\overline{\Omega}$, а величина $I(\mathbf{x})$ определяется равенством (1).

Доказательство. Воспользуемся представлением произвольной функции $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}} u(\mathbf{v}')d\mathbf{v}' - \int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v})\Delta u(\mathbf{v})d\mathbf{v},\ \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{10}$$

где $\dfrac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}}$ – производная функции Грина по направлению внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{v}'$ [2, с. 130].

Представление (10) для функции $Q(\mathbf{x})$ с учетом, того что $\Delta Q(\mathbf{x}) = 2(A_1 + ... + A_n)$ примет вид

$$Q(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}} Q(\mathbf{v}')d\mathbf{v}' - 2(A_1 + ... + A_n)\int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v})d\mathbf{v},\ \ \mathbf{x} \in \Omega. \tag{11}$$

Также с помощью равенства (10) решение задачи (7), (8) можно представить в виде

$$u(Q;\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}} Q(\mathbf{v}')d\mathbf{v}', \ \mathbf{x}\in\Omega. \tag{12}$$

Из равенств (11), (12) и положительности функции Грина в области Ω следует, что

$$|Q(\mathbf{x}) - u(Q;\mathbf{x})| = 2|A_1 + \ldots + A_n| \int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v})d\mathbf{v}, \ \mathbf{x}\in\Omega,$$

а значит

$$\|Q - u(Q)\|_{L_p(\Omega)} = 2|A_1 + \ldots + A_n| \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v})d\mathbf{v} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Дальнейшая задача состоит в преобразовании полученого интеграла с целью определения его явной зависимости от площади $\overline{\Omega}$.

Пусть $\tilde{\mathbf{I}}^n$ – n-мерный куб единичной площади, котрый с помощью гомотетии с некоторым коэффициентом α переходит в $\overline{\Omega}$. Тогда между объемами этих n-мерных кубов существует следующее соотношение $|\overline{\Omega}| = \alpha^n |\tilde{\mathbf{I}}^n|$, откуда $\alpha = \sqrt[n]{|\overline{\Omega}|}$.

С учетом равенства (4) леммы 2 и соответствующей замены переменных будет верно соотношение

$$\left(\int_\Omega \left(\int_\Omega G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v})d\mathbf{v} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha^{2+\frac{n}{p}} \left(\int_{\tilde{\mathbf{I}}^n} \left(\int_{\tilde{\mathbf{I}}^n} G_{\tilde{\mathbf{I}}^n}(\mathbf{x};\mathbf{v})d\mathbf{v} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подставим соответствующее значение α и заметим, что благодаря свойству (5) функции Грина последнее равенство не изменится в результате сдвига $\tilde{\mathbf{I}}^n$ на произвольный вектор пространства $\mathbf{R}^n$, значит в качестве $\tilde{\mathbf{I}}^n$ можно выбрать произвольный n-мерный куб единичной площади со сторонами параллельными осям координат, в частности, область $\mathbf{I}^n$. Тогда равенство (13) примет вид

$$\|Q - u(Q)\|_{L_p(\Omega)} = 2|A_1 + \ldots + A_n| \cdot |\Omega|^{\frac{2}{n}+\frac{1}{p}} \|I\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Доказательство основного результата начнем с построения для заданной функции $f \in C^2(\mathbf{I}^n)$ и фиксированного номера N такого разбиения P_N^* n-мерного куба $\mathbf{I}^n$, что последовательность разбиений $\{P_N^*\}_{N=1}^\infty$ будет асимптотичеки оптимальной. Разбиение будем строить в два этапа. Элементами разбиения на первом этапе будут n-мерные кубы, количество которых мало по сравнению с величиной N.

Для определения количества элементов промежуточного разбиения для произвольного фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ положим

$$m := \min\left\{\tilde{m} \in \mathbf{N} : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{m}}\right)^2 \omega\left(\frac{1}{2\tilde{m}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{N^{2/n}}\right\}, \tag{14}$$

где $\omega(\delta)$ определяется равенством (2). При этом очевидно, что $m \to \infty$ при $N \to \infty$.

В качестве количества элементов промежуточного разбиения выберем величину m^n, и разобьем $\mathbf{I}^n$ на равные n-мерные кубы D^s, $s = 1,...,m^n$ с ребром длины $\frac{1}{m}$. Легко убедиться в том, что

$$m^n = o(N), \ N \to \infty \tag{15}$$

(идею доказательства см., например, в [4]).

В дальнейшем, на каждом из элементов построенного разбиения вместо заданной функции, будем рассматривать ее полином Тейлора. Для этого определим функции $f_N(\mathbf{x})$ и $Q_N(\mathbf{x})$, воспользовавшись обозначением $P_2(f;\mathbf{x};\tilde{\mathbf{x}}_s)$ для полинома Тейлора второго порядка функции $f(\mathbf{x})$ в центре $\tilde{\mathbf{x}}_s$ каждого n-мерного куба D_s, следующим образом:

$$1)\, f_N(\mathbf{x}) = P_2(f;\mathbf{x};\tilde{\mathbf{x}}_1),\ Q_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{\mathbf{x}}_1)x_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{\mathbf{x}}_1)x_n^2,\ \mathbf{x} \in D_1;$$

$$2)\, f_N(\mathbf{x}) = P_2(f;\mathbf{x};\tilde{\mathbf{x}}_s),\ Q_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)x_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)x_n^2,\ \mathbf{x} \in D_l \setminus \cup_{i=1}^{s-1} \partial D_i$$

для $1 < s \leq m^2$.

Теперь наша задача будет состоять в определении количества элементов, на которые будет дополнительно разбит каждый n-мерный куб D^s, $s = 1,...,m^n$.

Для этого покроем D_s сеткой, состоящей из n-мерных кубов фиксированной площади, причем для удобства совместим любую вершину D_s с вершиной одного из элементов сетки. Пересечение D_s с построенной сеткой и даст нам требуемое разбиение. Такое разбиение будет состоять из n-мерных кубов сетки, а также может содержать n-мерные пераллелепипеды вдоль границы D_s.

Для того, чтобы определить площадь элементов сетки для заданной функции $f(\mathbf{x})$ и фиксированного N, предположим, что наше разбиение состоит только из n-мерных кубов, количество которых для каждого D_s в этом случае обозначим через $\left(\tilde{k}_s\right)^n$. Сами элементы разбиения в этом случае обозначим через $\overline{\Omega}_{s,i}$, $i=1,\dots,\left(\tilde{k}_s\right)^n$, $s=1,\dots,m^n$. Тогда $\bigcup\limits_{s=1}^{m^n}\bigcup\limits_{i=1}^{\left(\tilde{k}_s\right)^n}\overline{\Omega}_{s,i}$ будет представлять собой разбиение $\mathbf{I}^n$ при заданном N, поэтому $\sum\limits_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^n=N$.

Нам необходимо для каждого D_s определить величину $\left(\tilde{k}_s\right)^n$. Для этого найдем и минимизируем погрешность приближения функции $f_N(\mathbf{x})$ соответствующим гармоническим сплайном $s(f_N,P_N^*)$ на $\mathbf{I}^n$. Искомая погрешность выражается через погрешность на каждом элементе разбиения

$$\left\|f_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p=\sum_{s=1}^{m^n}\sum_{i=1}^{\left(\tilde{k}_s\right)^n}\left\|f_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\Omega_{s,i})}^p. \tag{16}$$

Найдем теперь погрешность приближения функции $f_N(\mathbf{x})$ гармоническим сплайном на произвольном $\Omega_{s,i}$. Поскольку на $\Omega_{s,i}$ разность $f_N(x)-Q_N(x)$ является гармонической функцией, то с учетом леммы 3

$$\begin{aligned}&\left\|f_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\Omega_{s,i})}^p=\left\|Q_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\Omega_{s,i})}^p=\\&=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right|^p|\Omega_{s,i}|^{\frac{2p}{n}+1}\left\|\mathrm{I}\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p=\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right)^p\frac{1}{(m\tilde{k}_s)^{2p+n}}\left\|\mathrm{I}\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p,\end{aligned} \tag{17}$$

где использовано обозначение

$$M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_s)=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right|. \tag{18}$$

С учетом (16) равенство (17) примет вид

$$\left\|f_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p=\sum_{s=1}^{m^n}\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right)^p\frac{1}{m^{2p+n}\left(\tilde{k}_s\right)^{2p}}\left\|\mathrm{I}\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p. \tag{19}$$

Далее применим метод неопределенных множителей Логранжа для нахождения точки экстремума правой части (19) при условии

$$\sum_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^n=N. \tag{20}$$

Откуда получим

$$\left(\tilde{k}_s\right)^n=\frac{N\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right)^{\frac{np}{2p+n}}}{\sum\limits_{i=1}^{m^n}\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_i)\right)^{\frac{np}{2p+n}}},\quad s=1,\dots,m^n. \tag{21}$$

В качестве площади элементов сетки $\overline{\Omega}_i\subset D_s$ при заданном N выберем

$$|\Omega| = \frac{1}{(m\tilde{k}_s)^n}, \; s = 1,\dots,m^n. \tag{22}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая очевидная оценка для величины $\tilde{k}_s$

$$\tilde{k}_s \ge \frac{N^{\frac{1}{n}} \min\limits_{\tilde{x}\in I^n} \left\{ \left(M_{f,N}(\tilde{x})\right)^{\frac{p}{2p+n}} \right\}}{m\|\Delta f\|_{L_\infty(I^n)}^{\frac{p}{2p+n}}} = C\frac{N^{\frac{1}{n}}}{m} > 0, \tag{23}$$

где C – не зависящая от N константа.

Далее будем считать, что разбиение n-мерного куба D_s содержит в себе и n-мерные кубы сетки и n-мерные параллелепипеды, полученные в результате пересечения D_s с элементами сетки. Обозначим через R_s совокупность n-мерных кубов, а через $\tilde{R}_s$ совокупность n-мерных параллелепипедов из разбиения D_s. Пусть также $\left(k_s\right)^n$ обозначает количество элементов из множества R_s, тогда количество элементов из $\tilde{R}_s$ будет определяться величиной $\sum_{i=1}^{n} C_n^i \left(k_s\right)^{n-i}$.

Очевидно, что для всех $s = 1,\dots,m^n$

$$\tilde{k}_s - 1 < k_s \le \tilde{k}_s. \tag{24}$$

Общее количество элементов разбиения D_s, при наличии среди них n-мерных параллелепипедов, равняется $(k_s+1)^n$. Покажем, что $\sum\limits_{s=1}^{m^n}(k_s+1)^n$ и N будут величинами одного порядка при $N \to \infty$.

Для этого получим оценки для величин $\sum\limits_{s=1}^{m^n}\left(k_s\right)^n$ и $\sum\limits_{s=1}^{m^n}\left(k_s\right)^{n-i}$, $i = 1,\dots,n$. Пользуясь неравенством (24) и условием (20) будем иметь

$$\sum_{s=1}^{m^n}\left(k_s\right)^n \le \sum_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^n = N, \tag{25}$$

$$\sum_{s=1}^{m^n}\left(k_s\right)^n \ge \sum_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^n + \sum_{s=1}^{m^n}\sum_{i=1}^{n} C_n^i(-1)^i\left(\tilde{k}_s\right)^{n-i} = N + \sum_{s=1}^{m^n}\sum_{i=1}^{n} C_n^i(-1)^i\left(\tilde{k}_s\right)^{n-i}. \tag{26}$$

Дополнительно воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$\sum_{s=1}^{m^n}\left(k_s\right)^{n-i} \le \sum_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^{n-i} \le m^{\frac{i}{n}}\left(\sum_{s=1}^{m^n}\left(\tilde{k}_s\right)^n\right)^{(n-i)/n} = m^i N^{\frac{n-i}{n}}, \; i = 1,\dots,n. \tag{27}$$

Учитывая оценки (25) – (27), получим следующее двойное неравенство

$$N-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2i-1} m^{2i-1} N^{\frac{n-(2i-1)}{n}} \le \sum_{s=1}^{m^n}(k_s+1)^n \le N+\sum_{i=1}^{n} C_n^i m^i N^{\frac{n-i}{n}}.$$

Поделим все части последнего неравенства на N и перейдем в полученном неравенстве к пределу при $N\to\infty$. При этом, учитывая (15), получим

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{s=1}^{m^n}(k_s+1)^n}{N}=1.$$

Значит, количество элементов построенного разбиения с ростом N имеет порядок равный N.

Следующим этапом доказательства будет получение оценки сверху для величины погрешности приближения заданной функции $f(\mathbf{x})$ гармоническим сплайном $s(f,P_N^*)$. Для этого нам понадобится ранее определенная функция $f_N(\mathbf{x})$ и приближающий ее гармонический сплайн $s(f_N,P_N^*)$. Имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned}\left\|f-s(f,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)} &\le \left\|f-f_N\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}+\left\|s(f,P_N^*)-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}+\\ &+\left\|f_N-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}.\end{aligned} \tag{28}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в правой части. Для первого и второго слагаемого сначала получим оценки погрешности на произвольном n-мерном кубе D_s из промежуточного разбиения с помощью величины $\|f-f_N\|_{L_\infty(D_s)}$.

Поскольку $|D_s|=\dfrac{1}{m^n}$, то верно соотношение

$$\|f-f_N\|_{L_p(D_s)}^p \le \frac{1}{m^n}\|f-f_N\|_{L_\infty(D_s)}^p. \tag{29}$$

Для оценки величины $\left\|s(f,P_N^*)-s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(D_s)}$ рассмотрим произвольный элемент разбиения $\Omega\subset D_s$. Согласно определению гармонического сплайна, разность $s(f,P_N^*)(\mathbf{x})-s(f_N,P_N^*)(\mathbf{x})$ является функцией гармонической на Ω и ее значения на $\partial\Omega$ совпадают со значениями разности $f(\mathbf{x})-f_N(\mathbf{x})$. Поэтому, пользуясь представлением (10) для решения соответствующей краевой задачи, получим

$$s(f,P_N^*)(\mathbf{x})-s(f_N,P_N^*)(\mathbf{x})=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{\mathbf{v}'}}(f(\mathbf{v}')-f_N(\mathbf{v}'))d\mathbf{v}',\quad \mathbf{x}\in\Omega.$$

Тогда

$$| s(f,P_N^*)(\mathbf{x}) - s(f_N,P_N^*)(\mathbf{x}) | \le \|f - f_N\|_{L_\infty(\Omega)} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}} d\mathbf{v}', \ \ \mathbf{x} \in \Omega.$$

Учитывая единственность решения (10) соответствующей краевой задачи [1, с. 90], имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(\mathbf{x};\mathbf{v}')}{\partial \overline{n}_{v'}} d\mathbf{v}' = 1,$$

а значит для всех $x \in D_s$

$$| s(f,P_N^*)(\mathbf{x}) - s(f_N,P_N^*)(\mathbf{x}) | \le \|f - f_N\|_{L_\infty(D_s)},$$

поэтому

$$\left\|s(f,P_N^*) - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(D_s)}^p \le \frac{1}{m^n} \|f - f_N\|_{L_\infty(D_s)}^p. \tag{30}$$

Воспользуемся теперь леммой 1 и определением величины m

$$\|f - f_N\|_{L_\infty(D_s)} \le \frac{1}{2m^2} \omega\left(\frac{1}{2m}\right) \le \frac{\varepsilon}{N^{2/n}}.$$

С учетом последнего неравенства и соотношений (29), (30), требуемые оценки будут иметь вид

$$\|f - f_N\|_{L_p(\mathbf{I}^n)} \le \frac{\varepsilon}{N^{2/n}}, \tag{31}$$

$$\left\|s(f,P_N^*) - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)} \le \frac{\varepsilon}{N^{2/n}}. \tag{32}$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое в неравенстве (28)

$$\begin{aligned} \left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p &= \sum_{s=1}^{m^n} \left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(D_s)}^p = \\ &= \sum_{s=1}^{m^n} \left(\sum_{\Omega \in R_s} \left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\Omega)}^p + \sum_{\widetilde{\Omega} \in \widetilde{R}_s} \left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\widetilde{\Omega})}^p \right). \end{aligned} \tag{33}$$

Поскольку для каждого n-мерного параллелепипеда $\widetilde{\Omega} \in \widetilde{R}_s$ существует такой элемент сетки Ω, что $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, то

$$\left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\widetilde{\Omega})}^p \le \left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

Поэтому, пользуясь равенством (17), для выражения (33) будет верна следующая оценка

$$\left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p \le \sum_{s=1}^{m^n} \left(M_{f,N}(\widetilde{\mathbf{x}}_s)\right)^p \frac{1}{(m\widetilde{k}_s)^{2p+n}} \|\mathbf{I}\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p (k_s + 1)^n.$$

С учетом оценки (24) для количества элементов k_s

$$\left\|f_N - s(f_N,P_N^*)\right\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p \le \frac{\|\mathbf{I}\|_{L_p(\mathbf{I}^n)}^p}{m^{2p+n}} \sum_{s=1}^{m^n} \left(M_{f,N}(\widetilde{\mathbf{x}}_s)\right)^p \frac{1}{(\widetilde{k}_s)^{2p}} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_n^i}{(\widetilde{k}_s)^i}\right). \tag{34}$$

Для величины $(\tilde{k}_s)^{2p}$ воспользуемся равенством (21), а к остальным величинам, содержащим $\tilde{k}_s$ применим оценку (23)

$$\left\|f_N - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)}^p \le$$
$$\le \frac{\|I\|_{L_p(I^n)}^p}{N^{\frac{2p}{n}}}\left(\frac{1}{m^n}\sum_{j=1}^{m^n}\left(M_{f,N}(\mathbf{x}_j)\right)^{\frac{np}{2p+n}}\right)^{\frac{2p+n}{n}}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}\frac{m^i}{N^{i/n}}\right). \tag{35}$$

Поскольку

$$\frac{1}{m^n}\sum_{j=1}^{m^n}\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_j)\right)^{\frac{np}{2p+n}} \to \int_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}}\, d\mathbf{x},\ N\to\infty, \tag{36}$$

то для достаточно больших N имеет место неравенство

$$\frac{1}{m^n}\sum_{j=1}^{m^n}\left(M_{f,N}(\tilde{\mathbf{x}}_j)\right)^{\frac{np}{2p+n}} < (1+\varepsilon)\int_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}}\, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, окончательная оценка будет иметь вид

$$\left\|f_N - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} < \frac{\|I\|_{L_p(I^n)}}{N^{2/n}}\left((1+\varepsilon)\int_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}}\, d\mathbf{x}\right)^{(2p+n)/np}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}\frac{m^i}{N^{i/n}}\right)^{1/p}.$$

Возвращаясь к неравенству (28), с учетом (31) и (32), получим

$$\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} < \frac{2\varepsilon}{N^{2/n}} + \frac{\|I\|_{L_p(I^n)}}{N^{2/n}}\left((1+\varepsilon)\int_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}}\, d\mathbf{x}\right)^{(2p+n)/np}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}\frac{m^i}{N^{i/n}}\right)^{1/p},$$

значит, воспользовавшись соотношением (15), будем иметь

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N^{2/n}\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} \le 2\varepsilon + \|I\|_{L_p(I^n)}\left((1+\varepsilon)\int_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{np/(2p+n)}\, d\mathbf{x}\right)^{(2p+n)/np}.$$

Наконец, поскольку величина $\varepsilon \in (0,1)$ выбирается произвольно, то переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N^{2/n}\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} \le \|I\|_{L_p(I^n)}\|\Delta f\|_{L_{np/(2p+n)}(I^n)}.$$

При получении оценки снизу мы снова будем использовать функцию $f_N(\mathbf{x})$ для получения промежуточной оценки. Для этого применим неравенство треугольника к норме $\left\|f_N - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)}$, тогда

$$\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} \ge \left\|f_N - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} - \left\|f - f_N\right\|_{L_p(I^n)} -$$
$$-\left\|s(f, P_N^*) - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)}. \tag{37}$$

Получение оценки снизу для первого слагаемого выполняется по той же схеме, которая использована для получения оценки сверху для этой величины. Результат такой оценки для достаточно больших N будет иметь вид

$$\left\|f_N - s(f_N, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} > \frac{\|I\|_{L_p(I^n)}}{N^{2/n}} \left((1-\varepsilon) \int\limits_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{2p+n}{np}} \left(1 - \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \tilde{C} \frac{m^{2i-1}}{N^{\frac{2i-1}{n}}} \right)^{1/p}.$$

Теперь мы можем преобразовать (37), воспользовавшись для оценки второго и третьего слагаемого неравенствами (31) и (32)

$$\left\|f - s(f, P_N^*)\right\|_{L_p(I^n)} > \frac{\|I\|_{L_p(I^n)}}{N^{2/n}} \left((1-\varepsilon) \int\limits_{I^n} |\Delta f(\mathbf{x})|^{\frac{np}{2p+n}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{2p+n}{np}} \left(1 - \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \tilde{C} \frac{m^{2i-1}}{N^{\frac{2i-1}{n}}} \right)^{1/p} - \frac{2\varepsilon}{N^{2/n}}.$$

Откуда сразу следует оценка снизу, что вместе с оценкой сверху доказывает теорему 1.

Автор выражает благодарность В.Ф. Бабенко и Ю.В. Бабенко за постановку задачи и внимание к работе.

Библиографические ссылки

1. **Олейник О.А.** Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник – М., 2005. – 260 с.
2. **Рихтмайер Р.** Принципы современной математической физики: пер. с англ. / Р. Рихтмайер – М., 1982. – 488 с.
3. **Babenko V.** Exact asymptotics of the optimal L_p-error of linear spline interpolation / V. Babenko, Yu. Babenko, D.Skorokhodov // East J. Approx. – 2008. – V. 14, № 3. – P. 285–317.
4. **Babenko V.** On asymptotical behavior of the optimal linear spline interpolation error of C^2 functions / V.Babenko, Yu. Babenko, A. Ligun, A. Shumeiko // East J. Approx. – 2006. – V. 12, № 1. – P. 71–101.
5. **Babenko Yu.** On the L_p-error of adaptive approximation of bivariate functions by harmonic splines / Yu. Babenko, T. Leskevich, // Applicable Analysis. – 2011. – V. 17, № 7. – P. 124–137.
6. **Babenko Yu.** Sharp asymptotics of the L_p approximation error for interpolation on block partitions / Yu. Babenko, T. Leskevich, J.-M. Mirebeau // Numerische Mathematik. – 2011. – V. 117, № 3. – P. 397–424.

Надійшла до редколегії 19.04.11