ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.5

Т. Р. Біккужина*, **В. Л. Великін****

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: mechtatel_t@mail.ru*

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: velikiny@rambler.ru*

Точні значення взаємного відхилення деяких інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів в рівномірній і інтегральній метриках

Отримано точні значення взаємного відхилення в просторах L_p, $1 \leq p \leq \infty$, інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів довільного порядку на класах неперервних і неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: **сплайн, підпростір, нормований простір.**

Получены точные значения взаимного уклонения в пространствах L_p, $1 \leq p \leq \infty$, интерполяционных подпространств эрмитовых сплайнов произвольного порядка на классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: **сплайн, подпространство, нормированное пространство.**

We obtained exact values of mutual deviation of interpolation subspaces of Hermitian splines of arbitraty orders on the classes of continuous and continuously differentiable functions in L_p spaces, $1 \leq p \leq \infty$.

Key words: **splines, subspace, normed space.**

Нехай C^q, $q = 0, 1, 2, ..., C^0 = C$, — лінійний нормований простір функцій $f(x)$, які мають на відрізку $[0, 1]$ q неперервних похідних, з нормою

$$||f||^{(q)} = \sum_{i=0}^{q} ||f^{(i)}||_{C[0,1]}, \qquad ||f||^{(0)} = ||f||.$$

Нехай ще $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$, $n \geq 1$, - довільне розбиття відрізка $[0, 1]$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, $\delta_n = max\{h_i, i = \overline{1, n}\}$, $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, q}$.

Як і в [1], кожній функції $f(x) \in C^q$ поставимо у відповідність інтерполяційний ермітовий сплайн порядку $2m + 1$, $m = 0, 1, 2, ...$, виду

$$s_{r,m}(f, \Delta_n; x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x), \qquad (1)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad r \leq q, \quad r \leq m,$$

де

$$H_{k,m}(h,t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^{k+s}. \qquad (2)$$

Підпростір таких сплайнів при фіксованих $m,\ r$, і Δ_n позначимо через $S_{r,m}(\Delta_n)$.

В цій роботі ми продовжили, розпочате в [2] - [5], дослідження величини

$$\Theta_{r,p}[S_{r_1,m_1}(\Delta_n), S_{r_2,m_2}(\Delta_n)] = \sup_{||f||^{(r)} \le 1} ||s_{r_1,m_1}(f,\Delta_n;x) - s_{r_2,m_2}(f,\Delta_n;x)||_p, \qquad (3)$$

яка представляє собою взаємне відхилення пари підпросторів ермітових сплайнів, що є аналогом розхилу (див. [6], гл. 3, п. 39) двох підпросторів в нормованому просторі. У подальшому в цій роботі будемо позначати $\Theta_{r,p}[S_{0,m_1}(\Delta_n), S_{0,m_2}(\Delta_n)]$ через $\Theta_{r,p}[m_1,m_2,n]$

В [3] для будь-яких $m \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\},\ \ \nu \in \mathbf{N}$, і довільного розбиття, знайдено точні значення для $\Theta_{0,\infty}[m+1,m,n]$, $\Theta_{1,\infty}[m+1,m,n]$, $\Theta_{0,1}[m+\nu,m,n]$ і $\Theta_{1,1}[m+\nu,m,n]$ для рівномірного розбиття.

В даній роботі отримані результати по точним значенням величини $\Theta_{r,p}[m_1,m_2,n]$ для будь-яких значень $m_i,\ i=1,2$, для $r=0,1,\ \ 1 \le p \le \infty$.

Нехай

$$\mathcal{A}_r(\Delta_n) := \sup_{||f||^{(r)} \le 1} \max_{1 \le i \le n} |f_i - f_{i-1}|,$$

$$\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) := \sup_{||f||^{(r)} \le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i - f_{i-1}|^p h_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поряд з функціями

$$\varphi_m(t) = H_{0,m+1}(1,t) - H_{0,m}(1,t) = C_{2m+1}^m t^{m+1}(1-t)^{m+1}(1-2t), \qquad (4)$$

з роботи [3] тут використовуються функції

$$\Phi_{m,j}(t) = H_{0,m+j+1}(1,t) - H_{0,m}(1,t).$$

Ясно, що

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t) + \varphi_{m+1}(t) + \varphi_{m+2}(t) + ... + \varphi_{m+j}(t). \qquad (5)$$

Основні результати цієї роботи базуються на лемах 1 - 4.

Лема 1. *Для будь-яких* $m \in \mathbf{N}_0,\ j \in \mathbf{N}$ *мають місце рівності*

$$\Theta_{r,\infty}[m+j,m,n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n)||\Phi_{m,j-1}||,$$

$$\Theta_{r,p}[m+j,m,n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n)||\Phi_{m,j-1}||_p, \quad r \in \mathbf{N}_0, \quad 1 \le p < \infty.$$

Доведення. Виходячи з співвідношень (3) і (1), з урахуванням тотожності

$$H_{0,m}(1,t) + H_{0,m}(1,1-t) \equiv 1,$$

безпосередньо маємо

$$\Theta_{r,p}[m+j,m,n] = \sup_{||f||^{(r)}\le 1} ||s_{0,m+j}(f,\Delta_n;x) - s_{0,m}(f,\Delta_n;x)||_p =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\int_0^1 |s_{0,m+j}(f,\Delta_n;x) - s_{0,m}(f,\Delta_n;x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| (f_i - f_{i-1}) \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f_i - f_{i-1})|^p \left| \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\{ t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i} \right\} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \cdot \sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) ||\Phi_{m,j-1}||_p.$$

Перша формула доводиться аналогічно. Лема доведена.

Наслідок 1. *Для будь-яких* $m_1, m_2 \in \mathbf{N}_0$, $m_1 \neq m_2$, *мають місце рівності*

$$\Theta_{r,\infty}[m_1,m_2,n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n) ||\Phi_{min\{m_1,m_2\},|m_2-m_1|-1}||,$$

$$\Theta_{r,p}[m_1,m_2,n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) ||\Phi_{min\{m_1,m_2\},|m_2-m_1|-1}||_p, \quad r = 0,1,2,\ldots, \quad 1 \le p < \infty.$$

Для подальшого відмітимо, що $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2m+3}}$ - точка відрізку$(0, \frac{1}{2})$, в якій функція $\varphi_m(t)$ досягає найбільшого значення на відрізку$[0,1]$, а отже

$$||\varphi_m(t)|| = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \cdot \frac{(m+1)^{m+1}\sqrt{2m+3}}{2^{m+1}(2m+3)^{m+2}}.$$

Також відмітимо, що з урахуванням співвідношень (4) - (5), функції $\Phi_{m,j}(t)$ мають такі властивості:

$$1)\ \Phi_{m,j}(1-t) = -\Phi_{m,j}(t), \quad t \in [0,1];$$

$$2)\ \Phi_{m,j}(t) > 0, \quad \Phi_{m,j}(t) > \Phi_{m+1,j}(t), \quad \Phi_{m,j+1}(t) > \Phi_{m,j}(t), \quad t \in (0, \frac{1}{2}).$$

Таким чином,

$$||\Phi_{m,j}|| = \max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \Phi_{m,j}(t), \qquad \int_0^1 |\Phi_{m,j}(t)|^p dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\Phi_{m,j}(t)\right)^p dt.$$

Лема 2. *Для норми функції $\Phi_{m,j}(t)$ в просторі C має місце наступне співвідношення:*

$$||\Phi_{m,j}|| = C_{2m+1}^{m} \mathcal{N}_{m,j}^{m+1} \sqrt{1-4\mathcal{N}_{m,j}} \Big(1 + a_m \mathcal{N}_{m,j} + ... + a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} \mathcal{N}_{m,j}^{j}\Big),$$

де

$$a_m := \frac{2(2m+3)}{m+2}, \quad \mathcal{N}_{m,j} := \left(\frac{C_{2m+1}^{m}(m+1)}{C_{2m+2j+1}^{m+j} \cdot 2(2m+2j+3)}\right)^{\frac{1}{j+1}}.$$

Доведення. Нехай $u := t(1-t)$. Тоді $(u')^2 = 1-4u$, а $\varphi_m(t) = C_{2m+1}^{m} u^{m+1} u'$,

$$\varphi_{m+1}(t) = C_{2m+3}^{m+1} u^{m+2} u', \quad C_{2m+3}^{m+1} = C_{2m+1}^{m} a_m, \quad \varphi_{m+1}(t) = a_m u \varphi_m(t),$$

$$\varphi_{m+2}(t) = a_m a_{m+1} u^2 \varphi_m(t), \ \ . \ . \ . \ , \varphi_{m+j}(t) = a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} u^j \varphi_m(t).$$

Отже

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t)(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \cdots + a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} u^j). \qquad (6)$$

Нехай

$$P(t) := 1 + \sum_{i=1}^{j} \left(u^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right), \qquad Q(t) := 1 + \sum_{i=1}^{j-1} \left((i+1) u^i \prod_{k=1}^{i} a_{m+k}\right).$$

Тоді

$$P'(t) = a_m u' Q(t), \qquad \Phi_{m,j}(t) = C_{2m+1}^{m} u^{m+1} u' P(t),$$

$$\Phi'_{m,j}(t) = C_{2m+1}^{m} u^m \Big((m+1-4mu-6u)P(t) + a_m u(1-4u)Q(t)\Big) =$$

$$= C_{2m+1}^{m} u^m \Big(-4a_m u^2 Q(t) + u\Big(a_m Q(t) - 2(2m+3)P(t)\Big) + (m+1)P(t)\Big).$$

Покладемо ще

$$W(u) := \Big(-4a_m u^2 Q(t) + u\Big(a_m Q(t) - 2(2m+3)P(t)\Big) + (m+1)P(t)\Big).$$

Ясно, що
$$W(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots + b_j u^j + b_{j+1} u^{j+1}.$$
Обчислюючи коефіцієнти при u^i, $i = \overline{0, j+1}$, знайдемо
$$b_0 = m+1, \quad b_i = 0, \quad 1 \le i \le j,$$
$$b_{j+1} = -a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3),$$
а отже,
$$W(u) = m + 1 - a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3) u^{j+1}.$$
Нарешті, позначаючи
$$\omega_m = a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3) = \frac{C_{2m+2j+1}^{m+j} \cdot 2(2m+2j+3)}{C_{2m+1}^{m}},$$
будемо мати
$$\Phi'_{m,j}(t) = C_{2m+1}^{m} u^m (-\omega_m u^{j+1} + m + 1), \qquad -\omega_m u^{j+1} + m + 1 = 0, \qquad u = \mathcal{N}_{m,j},$$
де $\mathcal{N}_{m,j} = \left(\frac{m+1}{\omega_m}\right)^{\frac{1}{j+1}}$.

Максимум $\Phi_{m,j}(t)$ досягається в точці $t_{m,j} = \frac{1-\sqrt{1-4\mathcal{N}_{m,j}}}{2}$, $||\Phi_{m,j}|| = \Phi_{m,j}(t_{m,j})$. Лема 2 доведена.

Нехай далі
$$\mathcal{J}(a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-t)t\right)^a (1-2t)^b dt, \quad a > 0, \ b > 0.$$

Лема 3. *Має місце наступна рівність*
$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!}{2^{a+1} \prod_{i=0}^{a} (b+2i+1)}, \quad a, b \in \mathbf{N}_0.$$

Доведення. Дійсно,
$$\mathcal{J}(0,b) = \frac{1}{2b+1}.$$
Для довільного $a \in \mathbf{N}$, застосовуючи формулу інтегрування частинами, будемо мати
$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a}{2(b+1)} \mathcal{J}(a-1, b+2).$$
Таким чином, для $0 < i \le a$, $b > 1$,
$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-j+1)}{2^i (b+1)(b+3)\ldots(b+2i-1)} \mathcal{J}(a-i, b+2i),$$

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a(a-1)(a-2)...1}{2^a(b+1)(b+3)...(b+2a-1)}\mathcal{J}(0,b+2a), \quad \mathcal{J}(0,b+2a) = \frac{1}{2(b+2a+1)},$$

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!}{2^{a+1}\prod_{i=0}^{a}(b+2i+1)}.$$

Лема 3 доведена.

Інтеграл $\mathcal{J}(a,b)$ також можно обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!\cdot[l]!}{2^{2a+2}\cdot(a+[l]+1)!}, \quad \text{якщо } b=2l+1,$$

та

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!\cdot b!\cdot(a+[l])!}{2\cdot[l]!(2a+b+1)!}, \quad \text{якщо } b=2l,$$

які доводяться аналогічно.

Розглянемо далі поліном степеня jp відносно u

$$\Big(1+a_m u + a_m a_{m+1}u^2 + \cdots + a_m a_{m+1} a_{m+2}...a_{m+j-1}u^j\Big)^p = \sum_{i=0}^{jp}\mathcal{M}_i(a_{m,j})u^j, \qquad (7)$$

де $a_{m,j} = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+j-1})$, а $\mathcal{M}_i(a_{m,j})$ - це коефіцієнт при u^j. Наприклад,

$$\Big(1+a_0u+a_0a_1u^2\Big)^2 = 1+2a_0u+\Big(a_0^2+2a_0a_1\Big)u^2+2a_0^2a_1u^3+a_0^2a_1^2u^4.$$

Отже,

$$\mathcal{M}_0(a_0,a_1)=1,\ \mathcal{M}_1(a_0,a_1)=2a_0,\ \mathcal{M}_3(a_0,a_1)=2a_0^2a_1,\ \mathcal{M}_4(a_0,a_1)=a_0^2a_1^2.$$

Лема 4. *Для норм функцій $\varphi_m(t)$ і $\Phi_{m,j}(t)$ в просторі L_p, $1\le p<\infty$, мають місце наступні співвідношення*

$$||\varphi_m||_p = 2^{\frac{1}{p}}C_{2m+1}^m\Big(\mathcal{J}(mp+p,p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = 2^{\frac{1}{p}}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{jp}\mathcal{M}_i(a_{m,j})\mathcal{J}(mp+p+i,p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зокрема, для натуральних значень p

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p) = \frac{(mp+p+i)!}{2^{mp+p+i+1}\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}, \quad i=\overline{0,jp},$$

і тому

$$||\varphi_m||_p = \frac{1}{2^{m+1}}C_{2m+1}^m\left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = \frac{1}{2^{m+1}}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{jp}\mathcal{M}_i(a_{m,j})\frac{(mp+p+i)!}{2^i\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

Доведення. В силу (6), враховуючи, що $u = t(1-t)$, маємо

$$\Big(\Phi_{m,j}(t)\Big)^p = \Big(\varphi_m(t)\Big)^p \Big(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \dots + a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} u^j\Big)^p =$$

$$= \Big(C_{2m+1}^m\Big)^p u^{mp+p} \Big(u'\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^i = \Big(C_{2m+1}^m\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^{mp+p+i} \Big(u'\Big)^p.$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = \left(2\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\Phi_{m,j}(t)\Big)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\Big(C_{2m+1}^m\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \int_0^{\frac{1}{2}} u^{mp+p+i} (u')^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лема 4 доведена.

З лем 1 і 2 випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, *мають місце наступні співвідношення*

$$\Theta_{0,\infty}[m+j, m, n] = 2C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right),$$

$$\Theta_{1,\infty}[m+j, m, n] = \frac{2\delta_n}{2+\delta_n} C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right).$$

Для $j = 1$ ці співвідношення містяться в [3].

З лем 1 і 4 випливають наступні твердження.

Теорема 2. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, $1 \le p < \infty$ *справедливі рівності*

$$\Theta_{0,p}[m+1, m, n] = 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \Big(\mathcal{J}(mp+p, p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{0,p}[m+j, m, n] = 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, $1 \le p < \infty$ *і для рівномірного розбиття, мають місце наступні співвідношення*

$$\Theta_{1,p}[m+1, m, n] = \frac{1}{2n+1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \Big(\mathcal{J}(mp+p, p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+j, m, n] = \frac{1}{2n+1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p=1$ результати теорем 2 і 3 містяться в [3].

Зауважимо, що для натуральніх значень p інтеграли $\mathcal{J}(mp+p+i,p)$ можна обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{(mp+p+i)!}{2^{mp+p+i+1}\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)},$$

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{2^{-(2mp+2p+2i+2)}\cdot(mp+p+i)!\cdot[l]!}{(mp+p+i+[l]+1)!},\quad \text{якщо } p=2l+1,$$

та

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{(mp+p+i)!\cdot p!\cdot(mp+p+i+[l])!}{2\cdot[l]!\cdot(2mp+3p+2i+1)!},\quad \text{якщо } p=2l,\qquad i=\overline{0,jp}.$$

Отже, для натуральніх значень p

$$\Theta_{0,p}[m+1,m,n]=\frac{1}{2^m}C_{2m+1}^m\left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{0,p}[m+j,m,n]=\frac{1}{2^m}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{(j-1)p}\mathcal{M}_i(a_{m,j-1})\frac{(mp+p+i)!}{2^i\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+1,m,n]=\frac{1}{2^m(2n+1)}C_{2m+1}^m\left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+j,m,n]=\frac{1}{2^m(2n+1)}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{(j-1)p}\mathcal{M}_i(a_{m,j-1})\frac{(mp+p+i)!}{2^i\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Наведемо деякі значення інтерполяційних розхилів, які обчислені з точністю до 0,00001. Так,

$$\Theta_{0,\infty}[17,3,n]=0,35790,\quad \Theta_{1,\infty}[20,5,n]=0,02093\ \text{ при }\ \delta_n=0,15,$$

$$\Theta_{0,5}[25,5,n]=0,23862,\quad \Theta_{1,5}[3,24,20]=0,00731.$$

Для будь-яких чисел $r,m_0\in\mathbf{N}_0$, $k_0\in\mathbf{N}$ і $1\le p<\infty$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}\Theta_{0,p}[m,0,n]=\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\lim_{m\to\infty}\Theta_{r,\infty}[m,m_0,n]=\frac{1}{2}\mathcal{A}_r(\Delta_n),\qquad \lim_{m\to\infty}\Theta_{r,p}[m,0,n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$

$$\lim_{m\to\infty}\Theta_{r,p}[m,k_0,n]<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$

причому, границі в рівностях не досягаються.

Для $r = 0, 1,\ p = 1, \infty$ рівності отримані в [3].

Зазначимо, що

$$\mathcal{A}_{r+1}(\Delta_n) \le \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \le \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\overline{\Delta_n}) = \mathcal{A}_r(\overline{\Delta_n}), \quad r \in \mathbf{N}_0,$$

$$0 < \mathcal{A}_r(\Delta_n) \le \frac{2}{3}, \quad 0 < \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \le \frac{2}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Тому для $m \in \mathbf{N}_0,\ j \in \mathbf{N}$,

$$0 < \Theta_{0,p}[m + j, m, n] < 1, \quad 0 < \Theta_{r,p}[m + j, m, n] < \frac{1}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Зазначимо, нарешті, що для $r = 0, \quad 1 \le p < \infty,$ мають місце двосторонні оцінки

$$\Big(p!\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=0}^{p}(p + 2i + 1)\right)^{-\frac{1}{p}} \le \Theta_{0,p}[m, 0, n] < \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{2^{m_0}} C_{2m_0+1}^{m_0} \Big((m_0 p + p)!\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{m_0 p + p}(p + 2k + 1)\right)^{-\frac{1}{p}} \le \Theta_{0,p}[m, m_0, n] < \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Бібліографічні посилання

1. *Великин В.Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых фцнкций// Известия АН СССР, Серия математическая, 1973.– 37, С.165-185.
2. *Бовдуй Е.Ю., Великин В.Л.* Об интерполяционном растворе некоторых подпространств эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2007, №8– С.54–56.
3. *Великин В.Л.* Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2009, т. 17, №6/1, вип. 14 – С.54–56.
4. *Великин В.Л.* О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2010, №6/1, вип. 15 – С.14–16.
5. *Великин В.Л.* О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов по разным сеткам узлов// Вісник Дніпропетровського університету, 2011, №6/1, вип. 16 – С.32–40.
6. *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: Том 1/ Н.И. Ахиезер,И.М. Глазман - Харьков: Вища школа, 1977. – 316 с.

Надійшла до редколегії 05.05.2014