ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 81–87

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

*Днепропетровский университет экономики и права

**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛЬВУДА-ПОЛИА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В банахових просторах Харді одержані точні нерівності типу Харді-Літтльвуда-Поліа для аналітичних функцій однієї и двох комплексних змінних.

Ключові слова: аналітичні функції, простір Харді, точні нерівності.

В банаховых пространствах Харди получены точные неравенства типа Харди-Литтльвуда-Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных.

Ключевые слова: аналитические функции, пространство Харди, точные неравенства.

The exact inequalities of Hardy-Littlewood-Polya type have been obtained for analytic functions one and two complex variables in Hardy spaces.

Key words: analytic functions, Hardy spaces, exact inequalities.

С начала прошлого века особый интерес у многих математиков, начиная с Э. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харди, Дж. Литтльвуда, А. Н. Колмогорова, вызывает получение точных неравенств для норм промежуточных производных функции через норму самой функции и норму ее старшей производной. Современное развитие этой тематики связано с работами В. В. Арестова, С. Б. Стечкина, Л. В. Тайкова, В. Н. Габушина, Н. П. Купцова, А. Ю. Шадрина, В. М. Тихомирова, Н. П. Корнейчука, В. Н. Коновалова, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигуна, С. А. Пичугова, В. А. Кофанова, Г. Г. Магарил-Ильяева и многих других [1].

С нашей точки зрения, не меньший интерес представляет решение подобных задач и в случае аналитических функций комплексного переменного, где по сравнению с вещественным случаем не так много окончательных результатов [3 – 5]. Данная статья является своеобразным продолжением указанной тематики в комплексной плоскости.

Введем необходимые обозначения и понятия. Пусть $U\overset{\text{df.}}{=}\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $A(U)$ – множество функций, аналитических в круге U; H_q $(q\geq 1)$ – банахово пространство Харди, состоящее из функций $f\in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q=\|f\|_{H_q}=\begin{cases}\lim\limits_{\rho\to 1-0} M_q(f,\rho), & \text{если } 1\leq q<\infty,\\ \sup\limits_{z\in U}|f(z)|, & \text{если } q=\infty,\end{cases}$$

где $M_q(f,\rho) \overset{df.}{=} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{i\tau}) \right|^q d\tau \right\}^{\frac{1}{q}}$.

Известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $0 \le t < 2\pi$ [6; 8]. При этом если $1 \le p < q$, то справедливо включение $H_q \subset H_p$.

Символом H_q^r $(r \in N)$ обозначим множество функций $f \in A(U)$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ по переменной z принадлежат пространству Харди H_q. Следовательно, при $q \ge 2$ для производной функции $f \in H_q^r$ имеем $f^{(r)} \in H_2$. Используя разложение f в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j$ в области U, производную $f^{(r)}$ запишем в виде $f^{(r)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r}$, где $\alpha_{j,r} \overset{df.}{=} j(j-1)...(j-r+1)$. Поскольку для функции $f \in H_q^r$ норма

$$\left\| f^{(r)} \right\|_2 = \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^2 \left| c_j(f) \right|^2 \right\}^{1/2} \tag{1}$$

ее r-ой производной конечна в H_2, то конечными в этом пространстве будут и нормы всех ее промежуточных производных $f^{(r-k)}$ $(k = \overline{1, r-1})$. Отсюда, в частности, следует принадлежность указанных производных пространствам Харди H_p, где $1 \le p \le 2$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in N; 1 \le k \le r$ – *натуральное число*; $1 \le p \le 2$; $2 \le s, t \le q$. *Тогда для любой функции* $f \in H_q^r$, *у которой коэффициенты Тейлора* $c_j(f) = 0$, *где* $j = r-k, ..., r-1$, *имеют место неравенства*

$$\left\| f^{(r-k)} \right\|_p \le \frac{\alpha_{r,r-k}}{(\alpha_{r,r})^{1-k/r}} \left\| f \right\|_s^{k/r} \left\| f^{(r)} \right\|_t^{1-k/r}. \tag{2}$$

Неравенства (2) *являются точными в том смысле, что существует функция* $f_0 \in H_q^r$, *обращающая* (2) *равенства. При этом полагаем* $\alpha_{r,0} = 1$.

Доказательство. Поскольку при $k = r$ неравенство (2) очевидно, то полагаем, что $k < r$. Для функции f, принадлежащей множеству H_q^r и удовлетворяющей условию теоремы, а также для ее производной (r–k)-го порядка $f^{(r-k)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k}$ в силу равенства Парсеваля имеем

$$\left\| f \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_j(f) \right|^2, \tag{3}$$

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2=\sum_{j=r}^{\infty}\alpha_{j,r-k}^2\left|c_j(f)\right|^2. \tag{4}$$

Представим равенство (4) следующим образом:

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2=\sum_{j=r}^{\infty}(\alpha_{j,r})^{2(1-k/r)}\left|c_j(f)\right|^{2(1-k/r)}\left\{\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\left|c_j(f)\right|^{2k/r}. \tag{5}$$

Для получения неравенства (2) применим ряд идейных моментов, использованных И. В. Бердниковой и С. З. Рафальсоном в ходе доказательства теоремы 1 из [2]. Из (5) получаем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\sum_{j=r}^{\infty}\left|c_j(f)\right|^{2(1-k/r)}(\alpha_{j,r})^{2(1-k/r)}\left|c_j(f)\right|^{2k/r}. \tag{6}$$

Применяя к правой части соотношения (6) неравенство Гельдера для числовых рядов с показателями $r/(r-k)$ и r/k, а также учитывая формулы (1) и (3), запишем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\left|c_j(f)\right|^2\right\}^{k/r}\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\alpha_{j,r}^2\left|c_j(f)\right|^2\right\}^{1-k/r}=$$

$$=\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\|f\|_2^{2k/r}\left\|f^{(r)}\right\|_2^{2(1-k/r)}. \tag{7}$$

Установим справедливость равенства

$$\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}=\frac{\alpha_{r,r-k}}{(\alpha_{r,r})^{1-k/r}}. \tag{8}$$

Поскольку, как нетрудно убедиться, при $j\ge r$ $(j\in N)$

$$\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}=\frac{(j(j-1)\ldots(j-r+k+1))^{k/r}}{((j-r+k)\ldots(j-r+1))^{1-k/r}},$$

то для удобства рассуждений рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x)\overset{\mathrm{df.}}{=}\frac{(x(x-1)\ldots(x-r+k+1))^{k/r}}{((x-r+k)\ldots(x-r+1))^{1-k/r}}, \tag{9}$$

где $r\le x<\infty$, и покажем, что она является монотонно убывающей. Прологарифмировав обе части соотношения (9), получим

$$\ln g(x)=\frac{1}{r}\{k(\ln x+\ln(x-1)+\ldots+\ln(x-r+k+1))-$$
$$-(r-k)(\ln(x-r+k)+\ldots+\ln(x-r+1))\}. \tag{10}$$

Продифференцировав обе части равенства (10), имеем

$$g'(x)=g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left\{\frac{1}{(r-k)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-r+k+1}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x-r+k}+\ldots+\frac{1}{x-r+1}\right)\Bigg\}. \tag{11}$$

Заменяя каждое слагаемое в первых круглых скобках, расположенных в правой части соотношения (11), наибольшим числом $1/(x-r+k+1)$, а каждое слагаемое, записанное в расположенных там же вторых круглых скобках, наименьшим числом $1/(x-r+k)$, запишем

$$g'(x)\le g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left(\frac{1}{x-r+k+1}-\frac{1}{x-r+k}\right)<0.$$

Следовательно, функция g монотонно убывает на полусегменте $[r,\infty)$, а значит справедливо равенство (8). Используя (7) – (8), получаем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2\le\frac{\alpha_{r,r-k}}{(\alpha_{r,r})^{1-k/r}}\|f\|_2^{k/r}\left\|f^{(r)}\right\|_2^{1-k/r}. \tag{12}$$

Учитывая принадлежность промежуточных производных $f^{(r-k)}$ $(k=\overline{1,r})$ функции $f\in H_q^r$ пространству H_p $(1\le p\le 2)$ и справедливость включений $f\in H_s$, $f^{(r)}\in H_t$, где $2\le s,t\le q$, а также учитывая специфику определения нормы в пространстве Харди, из (12) получаем требуемое неравенство (2).

Покажем, что неравенство (2) является неулучшаемым в указанном выше смысле. Для этого рассмотрим, например, функцию $f_0(z)\overset{df.}{=}z^r$, которая принадлежит H_q^r. Поскольку $\left\|f_0^{(r)}\right\|_t=\alpha_{r,r}$; $\|f_0\|_s=1$; $\left\|f_0^{(r-k)}\right\|_p=\alpha_{r,r-k}$, то подставляя значения указанных величин в формулу (2) убеждаемся в том, что данное неравенство обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Пусть $z=(z_1,z_2)=(\rho_1e^{it_1},\rho_2e^{it_2})$ – точка двумерного комплексного пространства C^2; $U^2=\{z\in C^2:|z_j|<1; j=1,2\}$ – единичный бикруг в C^2; $\Gamma^2=\{z\in C^2:|z_j|=1; j=1,2\}$ – остов бикруга. Класс всех аналитических в U^2 функций обозначим через $A(U^2)$. Пусть $f\in A(U^2)$; $\rho_j\in[0,1), j=1,2; 1\le q<\infty$ и $M_q(f;\rho_1,\rho_2)=\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho_1e^{i\tau_1},\rho_2e^{i\tau_2})\right|^q d\tau_1 d\tau_2\right\}^{1/q}$. Символом $H_{q,2}=H_q(U^2)$ $(q\ge 1)$ обозначим пространство Харди в U^2, состоящее из функций $f\in A(U^2)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,2}=\|f\|_{H_{q,2}}=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{\rho_j\to 1-0\\ j=1,2}} M_q(f;\rho_1,\rho_2), & \text{если } 1\le q<\infty,\\ \sup\limits_{\substack{z_j\in U\\ j=1,2}}|f(z_1,z_2)| & ,\text{если } q=\infty.\end{cases}$$

Из результатов А. Зигмунда [9] следует, что для функции $f \in H_{q,2}$ $(1 \le q < \infty)$ почти всюду на Γ^2 существуют угловые граничные значения, выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\rho_j \to 1-0 \\ j=1,2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(\rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2}) - f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2}) \right|^q d\tau_1 d\tau_2 = 0$$

и функцию f можно считать заданной почти всюду на Γ^2. Поэтому под $H_{q,2}$ часто подразумевают именно множество таких граничных функций и говорят, что норма $f \in H_{q,2}$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2})$, которые существуют почти для всех $0 \le \tau_1, \tau_2 < 2\pi$.

Символом $H_{q,2}^{r_1,r_2}$ $(r_j \in N; j = 1,2)$ обозначим множество функций $f \in A(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(r_1,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2 и частные производные $f^{(r_1,0)}$ по переменной z_1 и $f^{(0,r_2)}$ по переменной z_2 принадлежат пространству $H_{q,2}$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* $r_1, r_2 \in N; 1 \le k_j \le r_j$ $(j = 1,2)$ – *натуральные числа,* $1 \le p \le 2$; $2 \le s,t,u,v \le q$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, *у которой коэффициенты Тейлора*

$$c_{\nu, r_2 - k_2}(f) = \ldots = c_{\nu, r_2 - 1}(f) = 0\,; c_{r_1 - k_1, \mu}(f) = \ldots = c_{r_1 - 1, \mu}(f) = 0,$$

где $\nu = r_1 - k_1, r_1 - k_1 + 1, \ldots$; $\mu = r_2 - k_2, r_2 - k_2 + 1, \ldots$, *справедливы неравенства:*

$$\left\| f^{(r_1 - k_1, r_2 - k_2)} \right\|_p \le \frac{\alpha_{r_1, r_1 - k_1}}{(\alpha_{r_1, r_1})^{1 - k_1/r_1}} \frac{\alpha_{r_2, r_2 - k_2}}{(\alpha_{r_2, r_2})^{1 - k_2/r_2}} \times$$

$$\times \left\| f \right\|_s^{k_1 k_2/(r_1 r_2)} \left\| f^{(r_1,0)} \right\|_t^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \left\| f^{(0,r_2)} \right\|_u^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1} \left\| f^{(r_1,r_2)} \right\|_v^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)} \quad (13)$$

Неравенства (13) *являются точными в том смысле, что существует функция* $f_1 \in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, *обращающая* (13) *в равенства.*

Доказательство. При $r_1 = k_1$ и $r_2 = k_2$ неравенство (13) очевидно. Если $r_1 = k_1$ и $1 \le k_2 \le r_2 - 1$ или $r_2 = k_2$ и $1 \le k_1 \le r_1 - 1$, то доказательство неравенства (13) повторяет ход доказательства теоремы 1. Поэтому всюду далее полагаем $1 \le k_j \le r_j - 1$ $(j = 1,2)$.

Пусть $f(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2}$ – произвольная функция из множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, удовлетворяющая условиям данной теоремы. Для функции f, ее частных производных $f^{(r_1,0)}(z_1,z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \alpha_{j_1,r_1} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1 - r_1} z_2^{j_2}$,

$$f^{(0,r_2)}(z_1,z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=r_2}^{\infty} \alpha_{j_2,r_2} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2 - r_2}$$

и смешанных производных

$$f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2-r_2},$$

$$f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1+k_1}z_2^{j_2-r_2+k_2}$$

в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_2^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2;\ \left\|f^{(r_1,0)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2, \tag{14}$$

$$\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2;\ \left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2, \tag{15}$$

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}^2\alpha_{j_2,r_2-k_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2 \tag{16}$$

Используя (16), запишем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$
$$\times\left(\alpha_{j_1,r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$
$$\times\left(\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^{k_1k_2/(r_1r_2)}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right)^2. \tag{17}$$

Из (17) получаем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$
$$\times\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left\{\left(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\alpha_{j_1,r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\right\} \tag{18}$$

Применяя к правой части неравенства (18) обобщенное неравенство Гельдера [7, с.36] с показателями $(r_1-k_1)(r_2-k_2)/(r_1r_2)$; $k_2(r_1-k_1)/(r_1r_2)$; $k_1(r_2-k_2)/(r_1r_2)$; $k_1k_2/(r_1r_2)$,с учетом (14) – (16) получаем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$
$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\le\left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$

$$\times\left\|f\right\|_2^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_2^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_2^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_2^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \quad (19)$$

Используя соотношение (8), и соображения, изложенные перед формулировкой теоремы 1, из (19) получаем требуемое неравенство (13).

Рассмотрим функцию $f_1(z_1,z_2)\overset{df.}{=}z_1^{r_1}z_2^{r_2}$, принадлежащую множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$. Поскольку $\left\|f_1^{(r_1,r_2)}\right\|_v=\alpha_{r_1,r_1}\alpha_{r_2,r_2}$; $\left\|f_1^{(0,r_2)}\right\|_u=\alpha_{r_2,r_2}$; $\left\|f_1^{(r_1,0)}\right\|_t=\alpha_{r_1,r_1}$; $\left\|f_1\right\|_s=1$; $\left\|f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_p=\alpha_{r_1,r_1-k_1}\alpha_{r_2,r_2-k_2}$, то нетрудно убедиться в том, что после подстановки указанных величин в неравенство (13) последнее обращается в равенство. Теорема 2 доказана.

В качестве замечания отметим, что результат теоремы 2 может быть соответствующим образом распространен на случай аналитических функций n $(n>2; n\in N)$ комплексных переменных.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко, В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – К., 2003. – 590 с.
2. **Бердникова, И. В.** Некоторые неравенства между нормами функции и ее производных в интегральных метриках / И. В. Бердникова, С. З. Рафальсон // Известия вузов. Математика. – 1985. – № 12. – С. 3 – 6.
3. **Вакарчук, С. Б.** О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций / С. Б. Вакарчук // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии [Сб. науч. трудов]. – К., 1988. – С. 4. – 7.
4. **Вакарчук, М. Б.** О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических в бикруге функций / М. Б. Вакарчук // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики [Тези доп. міжнар. конф.] – Дніпропетровськ, 1993. – С. 35.
5. **Вакарчук, М. Б.** Деякі питання апроксимації функцій у комплексній площині : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 «Математичний аналіз» / М. Б. Вакарчук. – Дніпропетровськ, 1995. – 20 с.
6. **Гофман, К.** Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М., 1963. – 312 с.
7. **Харди Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М., 1948. – 456 с.
8. **Duren P. L.** Theory of H_p spaces / P. L. Duren. – New York and London: Academic Press, 1970. – 192 p.
9. **Zigmund A.** On the boundary values of functions of several complex variables / A. Zigmund // Fund. Math. – 1949. – V. 36 – P. 47 – 59.

Надійшла до редколегії 15.04.10.