ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010. Вип. 15. С. 88 –90

УДК 517.5

В.Л.Великин
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ВЗАИМНОМ УКЛОНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ

Отримано точні значення і двосторонні оцінки інтерполяційних розхилів деяких підпросторів ермітових сплайнів на множинах неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: розхил, підпростір, сплайни.

Получены точные значения и двусторонние оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов на множествах непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: раствор, подпространство, сплайны.

We obtain exact values and two-sided estimates on the interpolatory openings of certain subspaces of Hermitian splines over sets of continuosly differentiable functions.

Key words: openings, subsets, splines.

Пусть, как обычно, C^q, $q = 0,1,2,\dots$, – линейное пространство функций, определенных на промежутке $[0,1]$ и имеющих на нем q непрерывных производных, а W^{q+1} – множество функций из C^q, у которых q-я производная абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $\| f^{(q+1)} \|_\infty = \| f^{(q+1)} \|_{L_\infty(0,1)} \le 1$.

Здесь мы продолжаем [1] исследовать, на этот раз на множествах W^{q+1}, значения взаимного уклонения подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов $S_{r,m}$:

$$S_{r,m} = \Big\{ s_{r,m}(f;x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x),$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1,n}, \quad f \in C^q, \quad r \le q, \quad r \le m \Big\},$$

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{C_{m+s}^{s}}{h^{m+s+1}} t^{k+s}, \tag{1}$$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1, \ n \ge 1, \ \ h_i = x_i - x_{i-1}, \ \ f_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j).$$

А именно, здесь мы оцениваем величину

$$\Theta_p\left[S_{q,m_1}, S_{q,m_2}\right] = \sup_{f \in W^{q+1}} \left\| s_{q,m_1}(f;x) - s_{q,m_2},(f;x) \right\|_{L_p(0,1)}.$$

Исходя из интегрального представления разности $f(x) - s_{q,m}(f,x)$, $f \in W^{q+1}$ (см. (2.9') из [2]), нетрудно получить следующее равенство для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$:

© В.Л..Великин, 2010

$$\int_0^1 K_{q,\nu,m}(x,t) f^{q+1}(t)dt,$$

$$K_{q,\nu,m}(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^{q-k}}{(q-k)!}(t-x_{i-1})^{q-k}\omega_{k,\nu,m}(h_i; x-x_{i-1}), & t \in [x_{i-1}, x_i), \\ 0, & t \notin [x_{i-1}, x_i), \end{cases}$$

а

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = H_{k,m+\nu}(h;u) - H_{k,m}(u).$$

С учетом равенств (1), имеем

$$\omega_{k,1,\mu}(h;u) = \frac{u^{\mu+1}(h-u)^{\mu+1}}{k!h^{2\mu+3-k}}\left(h C^{\mu}_{2\mu+1-k} - u C^{\mu+1}_{2\mu+2-k}\right).$$

И поскольку

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \omega_{k,1,m+j}(h;u),$$

то

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = \frac{u^{m+1}(h-u)^{m+1}}{k!h^{2m+3-k}} \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(h C^{m+j}_{2(m+j)+1-k} - u C^{m+j+1}_{2(m+j)+2-k}\right)\frac{u^j(h-u)^j}{h^{2j}}.$$

Теорема 1. *Для любых натуральных* m *имеет место равенство*

$$\Theta_\infty\left[S_{1,m}, S_{1,m+1}\right] = \frac{C^m_{2m}}{(m+1)2^{2m+3}}\delta_n^2, \tag{2}$$

где $\delta_n = \max\{h_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, заменим для упрощения h_i на h, $x - x_{i-1}$ на x, $t - x_{i-1}$ на t. Тогда для $q = \nu = 1$ будем иметь

$$K_{1,1,m}(x,t) = -t\left(H_{0,m+1}(h;x) - H_{0,m}(h;x)\right) + H_{1,m+1}(h;x) - H_{1,m}(h;x), \tag{3}$$

Обозначим через t_0 нуль функции $K_{1,1,m}(x,t)$, как функции переменной t. Из (3) с учетом равенств (1) получаем

$$t_0 = \left(\frac{m+1}{2m+1}h - x\right)\frac{h}{h-2x}.$$

Для $\frac{m}{2m+1}h \le x \le \frac{h}{2}$ $h \le t_0$, т. е. для таких x $K_{1,1,m}(x,t) \ge 0$ для всех $t \in [0,h]$. Поэтому для таких x

$$\int_0^1 |K_{1,1,m}(x,t)|\,dt = \frac{C^m_{2m}}{2m+2}\cdot\frac{x^{m+1}(h-x)^{m+1}}{h^{2m}} \le \frac{C^m_{2m}}{(2m+2)2^{2m+2}}h^2 =$$

$$= \max_{x\in[0,h]} \int_0^1 |K_{1,1,m}(x,t)|\,dt. \tag{4}$$

Если же $0 \le x \le \dfrac{m}{2m+1}h$, то

$$\int_0^1 | K_{1,1,m}(x,t) |\, dt = \frac{C_{2m}^m}{(2m+1)(2m+2)h^{2m+1}} \cdot \varphi_m(x)\, g_m(x),$$

где

$$\varphi_m(x) = x^{m+1}(h-x)^{m+1}, \quad g_m(x) = \frac{((m+1)h-(2m+1)x)^2 - (mh-(2m+1)x)^2}{h-2x}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $g_m(x)$ возрастает для рассматриваемых значений x. Тем самым равенство (2) доказано.

Заметим, что в случае произвольного q имеет место формальное равенство

$$\Theta_\infty[S_{q,m}, S_{q,m+1}] = \| \int_0^{\delta_n} | K_{q,1,m}(x,t) |\, dt \|_\infty,$$

где

$$K_{q,1,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^{q-k}}{(q-k)!} t^{q-k} \frac{x^{m+1}(\delta_n - x)^{m+1}}{k!\,\delta_n^{2m+3-k}} \left(\delta_n C_{2m+1-k}^m - x\, C_{2m+2-k}^{m+1}\right), x \in [0, \delta_n].$$

Теорема 2. *Имеет место следующее соотношение*

$$\frac{1}{32}\delta_n^2 = \Theta_\infty[S_{1,2}, S_{1,1}] < \Theta_\infty[S_{1,m}, S_{1,1}] < \frac{5}{32}\delta_n^2 = \lim_{m\to\infty} \Theta_\infty[S_{1,m}, S_{1,1}] \qquad (5)$$

Левая часть этого соотношения получается из равенства (2) при $m=1$, а предельное равенство и оба неравенства соотношения (5) вытекают из равенств (1) при $k=0,1$, свойства монотонности функции $H_{0,m}(h,u)$ и предельных равенств для функций $H_{k,m}$, полученных в [1].

Теорема 3. *Для любых натуральных* m *имеет место равенство*

$$\Theta_1[S_{1,m}, S_{1,m+1}] = \frac{C_{2m}^m}{2m+2} r_m \sum_{i=1}^{n} h_i^3, \quad r_m = \int_0^1 u^{m+1}(1-u)^{m+1} du.$$

В частности, $r_1 = 1/6$, $r_2 = 1/30$, $r_3 = 1/140$, $r_4 = 1/630, \ldots$.

В случае равномерного разбиения

$$\Theta_1[S_{1,m}, S_{1,m+1}] = \frac{C_{2m}^m}{2m+2} r_m \frac{1}{n^2}.$$

Библиографические ссылки

1. **Великин В.Л.** Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов / В.Л. Великин // Вісник Дніпропетр. ун-ту, 2009, т.17, №6/1, С.54–56.
2. **Великин В.Л.** Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классе дифференцируемых функций / В.Л. Великин // Изв. АН СССР, Серия математическая, 1973.–37, С.165 –185.

Надійшла до редколегії 01.04.10