

УДК 517.5

С. В. Гончаров

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: sergon.public@gmail.com

О вложении классов функций, интегрируемых с весом на отрезке и удовлетворяющих условия типа Липшица

Отримане узагальнення теореми про вкладення Харді-Літлвуда для деяких класів функцій, інтегрованих з вагою на $[-1; 1]$.

Ключові слова: інтегральна метрика, умова Липшица, функція ваги.

Получено обобщение теоремы о вложении Харди-Литтлвуда для некоторых классов функций, интегрируемых с весом на $[-1; 1]$.

Ключевые слова: интегральная метрика, условие Липшица, функция веса.

We obtain generalization of Hardy and Littlewood inclusion theorem for some classes of functions being integrable with a weight on $[-1; 1]$.

Key words: integral metric, Lipschitz condition, weight function.

Пусть $\alpha, \beta \in (-1; 0]$; $p \in [1; +\infty)$; $\nu \in (0; 1]$.

Вес $w: [-1; +1] \rightarrow \mathbb{R}$: $w(x) = e(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $0 < C_1 \leq e(x) \leq C_2$.

Возьмём отрезок $[a; b] \subseteq [-1; 1]$. $L_w^p[a; b]$ — пространство функций $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|f\|_{L_w^p[a; b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Рассмотрим функциональные классы: $K\mathcal{L}_w^p[a; b] = \{f \in L_w^p[a; b]: \|f\|_{L_w^p[a; b]} \leq K\}$,

$$M\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \{f \in L_w^p[a; b]: \forall h \in (0; \frac{b-a}{2})$$

$$\psi_-^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Mh^\nu,$$

$$\psi_+^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_{a+h}^b |f(x) - f(x-h)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Mh^\nu \}$$

$$M\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \{f \in L_w^p[a; b]: \forall h \in (0; \frac{b-a}{2})$$

$$\overline{\psi}^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \overline{w}(x; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Mh^\nu \}$$

где $\overline{\varphi}(A; B) = \frac{1}{B-A} \int_A^B \varphi(t) dt$. Также $\overline{\psi}^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_{a+h}^b |f(x) - f(x-h)|^p \overline{w}(x-h; x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Будем обозначать $H_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \bigcup_{M>0} M\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$ и $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \bigcup_{M>0} M\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$.

Если $e(x) \equiv 1$ и $\alpha = \beta = 0$, т.е. $w(x) \equiv 1$, класс $\mathcal{L}_w^p[a; b]$ обращается в $\mathcal{L}^p[a; b]$, а классы $\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$ и $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$ — в $\mathcal{H}_p^{(\nu)}[a; b] = Lip_{[a;b]}(\nu; p)$.

Аналогично, $Lip_{[a;b]}(\nu; p) = \bigcup_{M>0} MLip_{[a;b]}(\nu; p)$.

Класс $MLip_{[a;b]}(\nu) = \{f \in C_{[a;b]} \mid \forall x_1, x_2 \in [a; b]: |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\nu\}$.
Сформулируем теорему о вложении Харди и Литтлвуда, полученную в [1]:

Теорема 1. Если $f \in Lip_{[a;b]}(\nu; p)$, то:

- a) при $\nu p > 1$ функция f эквивалентна функции $f^* \in Lip_{[a;b]}(\nu - \frac{1}{p})$;
- b) при $\nu p \leq 1$ функция $f \in Lip_{[a;b]}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; q)$ для $\forall q \in [p; \frac{p}{1-\nu p})$.

Здесь мы установим некоторое обобщение этого результата на весовой случай:

Теорема 2. Если $\alpha \in (-1; 0]$, $\beta \in (-1; 0]$ и $f \in K\mathcal{L}_w^p[-1; 1] \cap M\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$, то:

- a) при $\nu p > 1$ функция f эквивалентна функции $f^* \in M^*Lip_{[-1;1]}(\nu - \frac{1}{p})$;
 - b) при $\nu p \leq 1$ функция $f \in K^*\mathcal{L}_w^q[-1; 1] \cap M^*\overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1; 1]$ для $\forall q \in [p; \frac{p}{1-\nu p})$;
- где константы K^* и M^* зависят от $K, M, \alpha, \beta, p, \nu$ (и q), но не от функции f .

Используем частично модифицированное доказательство теоремы 1 из [2].

Доказательство. Начнём с оценок, связывающих w и \bar{w} .

Покажем, что $\forall d \in (0; \frac{1}{2}), \forall x \in (-1; 1-d): \bar{w}(x; x+d) \leq C'_{\alpha;\beta} w(x)$.

$$1) x \in (-1; 0]: \bar{w}(x; x+d) = \frac{1}{d} \int_x^{x+d} w(t) dt \leq C_\alpha^{(1)} \frac{1}{d} \int_x^{x+d} (1+t)^\beta dt \leq C_\alpha^{(1)} (1+x)^\beta \leq C_\alpha^{(2)} w(x).$$

$$2) x \in [0; 1-d): \bar{w}(x; x+d) \leq C_\beta^{(3)} \frac{1}{d} \int_x^{x+d} (1-t)^\alpha dt = C_{\alpha;\beta}^{(4)} \frac{1}{d} ((1-x)^{1+\alpha} - (1-x-d)^{1+\alpha}) \stackrel{y=1-x}{=} \\ = C_{\alpha;\beta}^{(4)} g(z) y^\alpha, \text{ где } z = \frac{d}{y} \in [d; 1] \text{ и } g(z) = \frac{1-(1-z)^{1+\alpha}}{z} \in C_{[0;1]} \Rightarrow |g(z)| \leq C_\alpha^{(5)} \text{ при } z \in [0; 1].$$

Отсюда $\bar{w}(x; x+d) \leq C_{\alpha;\beta}^{(6)} w(x) \leq C_{\alpha;\beta}^{(7)} w(x)$. В любом случае $\bar{w}(x; x+d) \leq C_{\alpha;\beta}^{(8)} w(x)$.

Рассмотрев $\tilde{w}(x) = w(-x)$ и $\bar{\tilde{w}}(-x-d; -x) = \bar{\tilde{w}}(-x-d; (-x-d)+d) = \bar{w}(x; x+d)$, аналогично установим, что $\bar{w}(x; x+d) \leq C_{\alpha;\beta}^{(9)} w(x+d)$.

Иначе говоря, $\bar{w}(A; B) \leq C_{\alpha;\beta}^{(10)} w(A), C_{\alpha;\beta}^{(10)} w(B)$. Далее, $\forall x \in (A; B)$:

$$\bar{w}(A; B) = \frac{1}{B-A} \int_A^B w(t) dt = \frac{1}{B-A} \left(\int_A^x w(t) dt + \int_x^B w(t) dt \right) \leq \frac{1}{x-A} \int_A^x w(t) dt + \frac{1}{B-x} \int_x^B w(t) dt = \\ = \bar{w}(A; x) + \bar{w}(x; B) \leq C_{\alpha;\beta}^{(10)} w(x) + C_{\alpha;\beta}^{(10)} w(x) = C_{\alpha;\beta} w(x) \quad (1)$$

Отсюда $\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b] \subseteq C''' \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$, то есть $H_{p;w}^{(\nu)}[a; b] \subseteq \overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$ (2)

$$\text{(пусть } f \in \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b], \text{ тогда } \bar{\psi}^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| \bar{w}(x; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq C''' \left(\int_a^{b-h} | \dots |^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = C''' \psi_-^{(p)}(f; a; b; h) \leq C''' h^\nu$$

так что $f \in C''' \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$). Кроме того, если отрезок $[A'; B'] \subseteq [A; B]$, то

$$\bar{w}(A; B) = \frac{1}{B'-A'} \int_{A'}^{B'} \bar{w}(A; B) dx \leq C_{\alpha;\beta} \frac{1}{B'-A'} \int_{A'}^{B'} w(x) dx = C_{\alpha;\beta} \bar{w}(A'; B') \quad (3)$$

С другой стороны, $\forall d \in (0; \frac{1}{2}), \forall x \in [-1+d; 1-d]: w(x) \leq C^{(11)}\bar{w}(x; x+d)$ (4)
 $x \leq 0: w(x)[\bar{w}(x; x+d)]^{-1} \leq C^{(12)}(1+x)^\beta [\frac{1}{d} \int_x^{x+d} (1+t)^\beta dt]^{-1} \leq C^{(12)}(1+\frac{d}{1+x})^{-\beta} \leq C^{(13)};$
 $x \geq 0: w(x)[\bar{w}(x; x+d)]^{-1} \leq C^{(14)}(1-x)^\alpha [\frac{1}{d} \int_x^{x+d} (1-t)^\alpha]^{-1} \leq C^{(14)}(1-x)^{\alpha-\alpha} = C^{(14)};$
 в любом случае (4) имеет место. Аналогично $w(x) \leq C^{(15)}\bar{w}(x-d; x)$.

Поскольку при $\alpha, \beta \leq 0$ вес $w(x) \geq C_3 > 0$, то интегралы, указывающие на принадлежность f классам $K\mathcal{L}$ и $M\mathcal{H}$ (из определений этих классов), мажорируют аналогичные интегралы без веса с некоторой константой $C_{\alpha;\beta;p} > 0$. Значит, $f \in M_1 Lip_{[-1;1]}(\nu; p)$, поэтому в случае (а) достаточно воспроизвести рассуждения из [2] (лемма 1 и теорема 1, п. 1) и получить искомое утверждение.

Далее рассматривается случай (б); не ограничивая общности, считаем $\nu p < 1$.

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Поскольку $w(x) \geq C_3 > 0$, то $\forall a, b \in [-1; 1]:$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| w^{\frac{1}{p}}(x) w^{-\frac{1}{p}}(x) dx \stackrel{HG(p,p')}{\leq} \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b w^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq C_4 \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = C_4 \|f\|_{L_w^p[-1;1]} < \infty, \text{ т.е. } f \in L[-1; 1]. \text{ Следовательно, для}$$

$x \in [-1; 1]$ и $v \in (0; 1-x)$ можно определить «усредняющую» функцию

$$\Phi(x; v) = \frac{1}{v} \int_x^{x+v} f(t) dt = \frac{1}{v} \int_0^v f(x+u) du = \int_0^1 f(x+vz) dz, \text{ и пусть } \Phi(x; 0) := f(x)$$

Тогда для $h > 0$ и $x+h < 1$, ввиду непрерывности $f(\cdot)$ на $[x; x+h]$

$$f(x) - \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du = \Phi(x; 0) - \Phi(x; h) = - \int_0^h \Phi'_v(x; v) dv =$$

$$= - \int_0^h \left(-\frac{1}{v^2} \int_0^v f(x+u) du + \frac{1}{v} f(x+v) \right) dv = - \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v (f(x+v) - f(x+u)) du \right\} dv$$

$$\text{откуда } f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du - \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v (f(x+v) - f(x+u)) du \right\} dv \quad (5)$$

и аналогично для $x-h > -1$, взяв усреднение $\Phi(x; v) = \frac{1}{v} \int_{x-v}^x f(t) dt:$

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x-u) du - \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v (f(x-v) - f(x-u)) du \right\} dv \quad (6)$$

Пусть $[a; b] \subset [-1; 1]: \exists h > 0: [a; b+h] \subseteq [-1; 1]. \|f\|_{L_w^q[a; b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{(5)}{=}$

$$= \left(\int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du - \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v [f(x+v) - f(x+u)] du \right\} dv \right|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x+u)| du \right]^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int_a^b \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)| du \right\} dv \right]^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2 \quad (7)$$

1) Оценим сверху I_1 , применив для внутреннего интеграла неравенство Гёльдера с показателями p и p' : $I_1 \leq h^{-1} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x+u)|^p du \right]^{\frac{q}{p}} \cdot \left[\int_0^h du \right]^{\frac{q}{p'}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} =$
 $= h^{-1+\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x+u)|^p w(x+u) w^{-1}(x+u) du \right]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \left[\int_0^h |f(x+u)|^p du \right]^1 w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq$
 $\leq C_6 h^{-\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left[\int_x^{x+h} |f(t)|^p w(t) dt \right]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \left[\int_0^h |f(x+u)|^p du \right]^1 w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq$
 $\leq C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x+u)|^p w(x) du \right] dx \right)^{\frac{1}{q}} = C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_0^h \left[\int_a^b (\dots) dx \right]^{\frac{1}{p}} du \right)^{\frac{1}{q}} \leq$
 $\leq C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \left(\underbrace{\int_0^h \left[\left(\int_a^b |f(x+u) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p du}_{= \psi_-^{(p)}(f; a; b+u; u) \leq M \nu \leq M} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$
 $\leq C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} (M + K)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^h du \right)^{\frac{1}{q}} = C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M + K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \quad (8)$

2) Оценим $I_2 = \left(\int_a^b T^q(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$, где $T(x) = \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)| du \right\} dv$.

Вновь используя то, что из $\alpha, \beta \leq 0$ вытекает $f \in L^p[-1; 1]$ и $f \in \text{Lip}_{[-1; 1]}(\nu; p)$, воспроизведём оценку $T(x)$ (и I_2) в [2, (17) – (19)]. Итак, для $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > 0$ и $\gamma = \max\{0; (1 + \nu p)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{\varepsilon}{2}\}$, обозначая $\mu = \varepsilon - \gamma + (1 + \nu p)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$:

$$I_2 \leq C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \left(\int_a^b \left[\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)|^p du \right\} dv \right] w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_a^b \int_0^h \int_0^v (\dots) du dv dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^h \int_a^b \int_0^v (\dots) du dx dv \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^h \int_a^b \int_0^v (\dots) dx du dv \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v \left(\int_a^b |f(x+v) - f(x+u)|^p w(x) dx \right)^{\frac{p}{p}} du \right\} dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v \left[\left(\int_a^b |f(x+v) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\int_a^b |f(x) - f(x+u)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p du \right\} dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C_7' M h^\mu \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left[\int_0^v v^{\nu p} du \right] dv \right)^{\frac{1}{q}} = C_7' M h^\mu \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q + \nu p + 1} dv \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\int_0^h (\dots) dv$ сходится $\Leftrightarrow (-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q + \nu p + 1 > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{p} + \varepsilon - \gamma < \nu \frac{p}{q} + \frac{2}{q}$; по определению γ , имеем $\frac{2}{p} + \varepsilon - \gamma \leq \frac{2}{p} + \frac{3}{2}\varepsilon - (1 + \nu p)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. А $\frac{2}{p} + (\frac{3}{4}\nu - \frac{3}{4p} + \frac{3}{4q}) - (\frac{1}{p} + \nu - \frac{1}{q} - \nu \frac{p}{q}) < \nu \frac{p}{q} + \frac{2}{q} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) < 0$, что верно вследствие выбора q , откуда $\frac{2}{p} + \varepsilon - \gamma < \nu \frac{p}{q} + \frac{2}{q}$. Поэтому

$$I_2 \leq C_8 M h^{\varepsilon - \gamma + (1 + \nu p)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon + (2 + \nu p)\frac{1}{q}} = C_8 M h^{\frac{1}{p} + \nu - \frac{2}{p} + \frac{1}{q}} = C_8 M h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9): $\|f\|_{L_w^q[a; b]} \leq C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M + K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} + C_8 M h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \quad (10)$

Если взять функцию $\tilde{f}(x) = f(-x)$ и вес $\tilde{w}(x) = w(-x)$ (т.е. $w(x)$ с заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$, $e(x) \leftrightarrow e(-x)$), то легко видеть, что

$$\psi_-^{(p);w}(f; -1; 1; h) = \psi_+^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f}; -1; 1; h) \text{ и } \psi_+^{(p);w}(f; -1; 1; h) = \psi_-^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f}; -1; 1; h) \quad (11)$$

поэтому для $[a'; b'] \subset [-1; 1]$ такого, что $\exists h > 0: [a' - h; b'] \subseteq [-1; 1]$, аналогично (10) получаем: $\|f\|_{L_w^q[a'; b']} \leq C_9 K^{1-\frac{p}{q}}(M + K)^{\frac{p}{q}h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} + C_{10} M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (12)

$$\begin{aligned} \text{Ввиду (10) и (12): } \|f\|_{L_w^q[-1; 1]} &= \left(\int_{-1}^1 (\dots)\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_0^1 (\dots)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{-1}^0 (\dots)\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \\ &= 2^{\frac{1}{q}} (\|f\|_{L_w^q[0; 1]} + \|f\|_{L_w^q[-1; 0]}) \leq C_{11} K^{1-\frac{p}{q}}(M + K)^{\frac{p}{q}h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} + C_{12} M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (13)$$

где $h \in (0; 1)$. Отсюда, в частности, $\|f\|_{L_w^q[-1; 1]} < \infty$, так что $f \in K_2 \mathcal{L}_w^q[-1; 1]$ (14)

.....
Теперь рассмотрим $[a; b] \subset [-1; 1]$ такой, что $\exists k > 0: [a; b + k] \subseteq [1; 1]$, и оценим $\bar{\psi}^{(q)}(f; a; b + k; k)$ (при $a = -1$, $b = 1 - h$ и $k = h$ это будет $\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; 1; h)$):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(q)}(f; a; b + k; k) &= \left(\int_a^b |f(x + k) - f(x)|^q \bar{w}(x; x + k) dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x + \frac{k}{2}) - f(x)|^q \bar{w}(\dots) dx\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |f(x + k) - f(x + \frac{k}{2})|^q \bar{w}(\dots) dx\right)^{\frac{1}{q}} = J^+ + J^- \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим, например, J^+ . Пусть $h = \frac{k}{2}$, тогда $x + \frac{k}{2} + h = x + k \leq 1$. Ввиду (5):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x + u) du - \int_0^{\frac{1}{v^2}} \left\{ \int_0^v (f(x + v) - f(x + u)) du \right\} dv \\ f(x + \frac{k}{2}) &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x + \frac{k}{2} + u) du - \int_0^{\frac{1}{v^2}} \left\{ \int_0^v (f(x + \frac{k}{2} + v) - f(x + \frac{k}{2} + u)) du \right\} dv \end{aligned}$$

По неравенству Минковского $J^+ \leq J_1^+ + J_2^+ + J_3^+ =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x + \frac{k}{2} + u) - f(x + u)| du \right]^q \bar{w}(x; x + k) dx \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \left(\int_a^b \left[\int_0^{\frac{1}{v^2}} \left\{ \int_0^v |f(x + v) - f(x + u)| du \right\} dv \right]^q \bar{w}(x; x + k) dx \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \left(\int_a^b \left[\int_0^{\frac{1}{v^2}} \left\{ \int_0^v |f(x + \frac{k}{2} + v) - f(x + \frac{k}{2} + u)| du \right\} dv \right]^q \bar{w}(x; x + k) dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (16)$$

1) Оценим J_1^+ . Используя (1) и неравенство Гёльдера с показателями p и p' ,

$$\begin{aligned} J_1^+ &\leq \frac{1}{h} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x + \frac{k}{2} + u) - f(x + u)|^p du \right]^{\frac{q}{p}} \cdot \left[\int_0^h du \right]^{\frac{q}{p'}} \bar{w}(x; x + k) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C_{13} h^{-\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left[\int_x^{x+h} |f(t + \frac{k}{2}) - f(t)|^p w(t) dt \right]^{\frac{q-p}{p}} \left[\int_0^h |f(x + \frac{k}{2} + u) - f(x + u)|^p du \right]^1 \bar{w}(\dots) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C_{15} M^{1-\frac{p}{q}} k^{-\frac{1}{p} + \nu(1-\frac{p}{q})} \left(\int_a^b \left[\int_0^h |f(x + \frac{k}{2} + u) - f(x + u)|^p \bar{w}(x; x + k) du \right] dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C_{16} M^{1-\frac{p}{q}} k^{-\frac{1}{p} + \nu(1-\frac{p}{q})} \left(\int_0^h \left[\int_{a+u}^{b+u} |f(t + \frac{k}{2}) - f(t)|^p w(t) dt \right]^{\frac{1}{p}} du \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C_{17} M k^{-\frac{1}{p} + \nu - \nu \frac{p}{q} + \nu \frac{p}{q}} \left(\int_0^h du \right)^{\frac{1}{q}} = C'_{17} M k^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (17)$$

2) Вследствие (1): $J_2^+ \leq C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)| du \right\} dv \right]^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} =$
 $= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} I_2$, так что ввиду (9) $J_2^+ \leq C_8 M h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = C_{18} k^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ (18)

3) По (1): $J_3^+ \leq C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x + \frac{k}{2} + v) - f(x + \frac{k}{2} + u)| du \right\} dv \right]^q w(x + \frac{k}{2}) dx \right)^{\frac{1}{q}} =$
 $= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} \left(\int_{a + \frac{k}{2}}^{b + \frac{k}{2}} \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(y+v) - f(y+u)| du \right\} dv \right]^q w(y) dy \right)^{\frac{1}{q}}$; дальнейшая оценка J_3^+
 аналогична оценке I_2 (с $a \leftarrow a + \frac{k}{2}$, $b \leftarrow b + \frac{k}{2}$). Выходит, $J_3^+ \leq C_{19} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ (19)

Из (17), (18), (19) и (16) вытекает, что $J^+ \leq C_{20} M k^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$.

J^- оценивается аналогично J^+ , только вместо представления (5) используется представление (6) и модуль непрерывности $\psi_+^{(p)}$ вместо $\psi_-^{(p)}$. Следовательно, учитывая (15), $\bar{\psi}^{(q)}(f; a; b + k; k) \leq C_{21} k^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$; в частности, $\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; 1; h) \leq C_{22} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$.

Это означает, что $f \in M_2 \bar{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1; 1]$ (20)

Таким образом, $f \in K_2 \mathcal{L}_w^q[-1; 1] \cap M_2 \bar{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1; 1]$.

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $K \mathcal{L}_w^p[-1; 1] \cap M \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$.

Возьмём $\forall h \in (0; h_0)$, где $h_0 = \frac{1}{4}$, и рассмотрим

$$\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; 1; h) \leq 2^{\frac{1}{q}} (\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; \frac{1}{2}; h) + \bar{\psi}^{(q)}(f; 0; 1; h))$$
 (21)

1) Оценим $\bar{\psi}^{(q)}(f; 0; 1; h)$. Введём последовательность «средних» для $2 \leq n \in \mathbb{N}$:

$$f_n^+(x) := \frac{n}{1-x} \int_{x + \frac{1-x}{n}}^{x + \frac{1-x}{n}} f(t) dt = \frac{n}{1-x} \int_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u) du = n \int_0^{\frac{1-x}{n}} f(x + (1-x)v) dv$$

$f_n^+ \in C_{(0;1)}$ ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что так определённые $f_n^+(\cdot)$ удовлетворяют условиям п. (I) (с заменой $[-1; 1]$ на $[0; 1]$). $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} = \left(\int_0^1 \left| \frac{n}{1-x} \int_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u) du - \frac{n}{1-x} \int_0^{\frac{1-x}{n}} f(x) du \right|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$

$$= n \left(\int_0^1 \left| \int_0^{\frac{1-x}{n}} \frac{1}{1-x} (f(x+u) - f(x)) w^{\frac{1}{p}}(x) \chi\left(\frac{1-x}{n} - u\right) du \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p} |f(x+u) - f(x)|^p w(x) \chi^p\left(\frac{1-x}{n} - u\right) dx \right)^{\frac{1}{p}} du$$
 (по обобщённому неравенству

Минковского), где $\chi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$ $\chi\left(\frac{1-x}{n} - u\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{n} < u \Leftrightarrow x > 1 - nu$, поэтому

$$\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{1-nu} (1-x)^{-p} |f(x+u) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} du \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1} \left(\int_0^{1-u} |f(x+u) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} du \leq M \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\nu} du = M' n^{-\nu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Значит, $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (22)

$$\|f_n^+\|_{L_w^p[0;1]} \leq \|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} + \|f\|_{L_w^p[0;1]} \leq M' + K = K_3 < \infty: f_n^+ \in K_3 \mathcal{L}_w^p[0;1] \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Взяв } \forall h \in (0; h_0), \text{ оценим } \psi_-^{(p)}(f_n^+; 0; 1; h) &= \left(\int_0^{1-h} |f_n^+(x+h) - f_n^+(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= n \left(\int_0^{1-h} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} [f(x+h+(1-x-h)v) - f(x+(1-x)v)] w^{\frac{1}{p}}(x) dv \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{1-h} |f(x+(1-x)v+h(1-v)) - f(x+(1-x)v)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} dv \end{aligned}$$

Пусть $x + (1-x)v = y$, $h(1-v) = \tilde{h}$, тогда: $x = \frac{y-v}{1-v}$, $1-x = \frac{1-v-y+v}{1-v} = \frac{1-y}{1-v}$; $w(x) \leq C_{23}(1-x)^\alpha$, и т.к. $1 \geq 1-v \geq 1-\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$, то $w(x) \leq C_{24}(1-y)^\alpha \leq C_{25}w(y)$ (ибо $(1+y)^\beta \geq C_{26}$); $dx = (1-v)^{-1}dy$; пределы $0 \rightarrow v$, $1-h \rightarrow 1-\tilde{h}$. Таким образом,

$$\psi_-^{(p)}(f_n^+; 0; 1; h) \leq C_{27}n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_v^{1-\tilde{h}} |f(y+\tilde{h}) - f(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} dv \leq C_{27}Mn \int_0^{\frac{1}{n}} \tilde{h}^\nu dv \leq C_{27}Mh^\nu$$

$$\text{Аналогично } \psi_+^{(p)}(f_n^+; 0; 1; h) \leq C_{28}Mh^\nu. \text{ Значит, } f_n^+ \in M_3 \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1] \quad (24)$$

Итак ((23) и (24)), функции f_n^+ действительно удовлетворяют условиям п. (I). Заметим, что K_3 и M_3 не зависят от n .

.....
Теперь рассмотрим непрерывные на $(0; 1)$ функции $f_{n;m}^+(x) = f_n^+(x) - f_m^+(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Во-первых, } \forall h \in (0; h_0): \psi_-^{(p)}(f_{n;m}^+; 0; 1; h) &= \|f_{n;m}^+(x+h) - f_{n;m}^+(x)\|_{L_w^p[0;1-h]} = \\ &= \|(f_n^+(x+h) - f_n^+(x)) - (f_m^+(x+h) - f_m^+(x))\|_{L_w^p[0;1-h]} \leq \\ &\leq \psi_-^{(p)}(f_n^+; 0; 1; h) + \psi_-^{(p)}(f_m^+; 0; 1; h) \stackrel{(24)}{\leq} 2M_3h^\nu = M_4h^\nu \end{aligned}$$

$$\text{и } \psi_+^{(p)}(f_{n;m}^+; 0; 1; h) \leq \psi_+^{(p)}(f_n^+; 0; 1; h) + \psi_+^{(p)}(f_m^+; 0; 1; h) \leq M_4h^\nu.$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и укажем, что, во-вторых, из (22) вытекает:

$$\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: \|f_{n;m}^+\|_{L_w^p[0;1]} = \|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^p[0;1]} < \varepsilon$$

Иными словами, $f_{n;m}^+$ при $n, m \geq N_\varepsilon$ также удовлетворяет условиям п. (I):

$$f_{n;m}^+ \in \varepsilon \mathcal{L}_w^p[0;1] \cap M_4 \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1]$$

Поэтому, в соответствии с (13), для таких n и m

$$\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leq C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}}(M_4 + \varepsilon)^{\frac{p}{q}}h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{30}M_4h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Положим $h = \varepsilon^\tau$, где $\tau > 0$: тогда (для $\varepsilon < 1$) $\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leq$

$$\leq C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(M_4 + \varepsilon)^{\frac{p}{q}} + C_{30}M_4\varepsilon^{\tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leq C_{31}\varepsilon^{\min\{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}); \tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\}} = C_{31}\varepsilon^\lambda$$

Выберем τ настолько малым, чтобы $1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) > 0$ — тогда и $\lambda > 0$, а значит,

$$\|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^q[0;1]} = \|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leq C_{31}\varepsilon^\lambda$$

То есть $\{f_n^+\}_{n=2}^\infty$ фундаментальна в $L_w^q[0;1]$, поэтому ввиду полноты этого пространства она сходится к некоторой функции $\bar{f} \in L_w^q[0;1]$. Но, учитывая (22), функции f и \bar{f} эквивалентны ($\|f - \bar{f}\|_{L[a;b]} \leq C_p^{(1)}(\|f - f_n^+\|_{L^p[a;b]} + C_{p;q}^{(2)}\|f_n^+ - \bar{f}\|_{L^q[a;b]})$), и можно считать, что $\|f_n^+ - f\|_{L_w^q[0;1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (25)

Применим п. (I) к функциям f_n^+ . Во-первых, по (14), $\|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} \leq K_5 < \infty$.

$$\text{Отсюда } \|f\|_{L_w^q[0;1]} \leq \|f - f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} + \|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} < \infty, \text{ и } f \in K_6 \mathcal{L}_w^q[0;1] \quad (26)$$

$$\text{Во-вторых, по (20), } \|[f_n^+(x+h) - f_n^+(x)]\bar{w}^{\frac{1}{q}}(x; x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leq M_6 h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \quad (27)$$

Так что по неравенствам треугольника, (1) и (27):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(q)}(f; 0; 1; h) &= \|[f(x+h) - f(x)]\bar{w}^{\frac{1}{q}}(x; x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leq \\ &\leq \|[f(x+h) - f_n^+(x+h)]\bar{w}^{\frac{1}{q}}(x; x+h)\|_{L^q[0;1-h]} + \\ &+ \|[f_n^+(x+h) - f_n^+(x)]\bar{w}^{\frac{1}{q}}(x; x+h)\|_{L^q[0;1-h]} + \|[f_n^+(x) - f(x)]\bar{w}^{\frac{1}{q}}(x; x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leq \\ &\leq C''_{\alpha;\beta} \|[f(x+h) - f_n^+(x+h)]w^{\frac{1}{q}}(x+h)\|_{L^q[0;1-h]} + M_6 h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} + \\ &+ C''_{\alpha;\beta} \|[f_n^+(x) - f(x)]w^{\frac{1}{q}}(x)\|_{L^q[0;1-h]} \leq M_6 h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} + 2C''_{\alpha;\beta} \|f_n^+ - f\|_{L^q_w[0;1]} \end{aligned}$$

Взяв достаточно большое $n = n(h)$, для которого $\|f_n^+ - f\|_{L^q_w[0;1]} < h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ (это можно сделать ввиду (25)), получим: $\bar{\psi}^{(q)}(f; 0; 1; h) \leq M_7 h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ (28)

2) Оценка $\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; \frac{1}{2}; h)$ аналогична оценке $\bar{\psi}^{(q)}(f; 0; 1; h)$.

«Средние» функции определяем «симметрично»: для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$f_n^-(x) := \frac{n}{1+x} \int_{x - \frac{1+x}{n}}^x f(t) dt = \frac{n}{1+x} \int_0^{\frac{1+x}{n}} f(x-u) du = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x - (1+x)v) dv$$

затем показываем, что $\|f\|_{L^q_w[-1; \frac{1}{2}]} \leq K_{10} < \infty$ (29)

$$\text{и } \bar{\psi}^{(q)}(f; -1; \frac{1}{2}; h) \leq M_{11} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \quad (30)$$

Из (26) и (29): $\|f\|_{L^q_w[-1;1]} \leq 2^{\frac{1}{q}} (\|f\|_{L^q_w[-1; \frac{1}{2}]} + \|f\|_{L^q_w[0;1]}) \leq 2^{\frac{1}{q}} (K_6 + K_{10}) = K_{12}$, следовательно, $f \in K_{12} \mathcal{L}^q_w[-1;1]$. А из (21), (28) и (30): $\bar{\psi}^{(q)}(f; -1; 1; h) \leq M_{12} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$. Эти оценки позволяют утверждать, что $f \in M_{12} \overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1;1]$.

Получается, $f \in K^* \mathcal{L}^q_w[-1;1] \cap M^* \overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1;1]$, и теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $\alpha, \beta \in (-1; 0]$. Тогда:

a) при $\nu p > 1$ $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq C_{34} \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \quad (\subseteq C'_{34} Lip_{[-1;1]}(\nu - \frac{1}{p}))$;

b) при $\nu p \leq 1$, если $\nu p > -\alpha$ и $\nu p > -\beta$, то $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq C_{34} \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$.

Доказательство. Рассуждения, приводящие к этому результату, в основном повторяют схему доказательства теоремы 2. Пусть $f \in \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$:

$$\forall h \in (0; \frac{1}{2}): \bar{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; h) = \left(\int_{-1}^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p \bar{w}(x; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq h^\nu$$

$$\text{Оценим } \psi_-^{(p)}(f; -1; 1; h) \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{-1+h} |f(x+h) - f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-1+h}^{1-h} (\dots)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} = H_1 + H_2.$$

В H_2 , по (4), $w(x) \leq C_{36} \bar{w}(x; x+h)$, откуда $H_2 \leq C_{37} \bar{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; h) \leq C_{37} h^\nu$.

Оценим H_1 . В случае (а) возьмём $\forall q > \frac{p}{1+\beta}$, а в случае (б) $\nu > -\frac{\beta}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{1+\beta} < \frac{p}{1-\nu p}$, и пусть $q \in (\frac{p}{1+\beta}; \frac{p}{1-\nu p})$. При этом $\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$. По неравенству Гёльдера

$$H_1 \leq \left(\int_{-1}^{-1+h} |f(x+h) - f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{-1}^{-1+h} w^{\frac{q}{q-p}}(x) dx \right)^{\frac{q-p}{pq}} = H_{1;1} \cdot H_{1;2}$$

$$H_{1;2} \leq C_{38} \left(\int_0^h t^{-\frac{\beta q}{q-p}} dt \right)^{\frac{q-p}{pq}} = C_{39} h^{\frac{\beta}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q}}. \text{ Покажем, что } H_{1;1} \leq C_{40} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}.$$

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Аналогично оценке $\overline{\psi}^{(q)}(f; a; b+k; k)$ и J^+ в т. 2, используя (5) ($f \in L[-1; 1]$, т.к. $f \in L_w^p[-1; 1]$) и неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} H_{1;1} &\leq \frac{1}{h} \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_0^h |f(x+h+u) - f(x+u)| du \right]^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)| du \right\} dv \right]^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+h+v) - f(x+h+u)| du \right\} dv \right]^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = J_1 + J_2 + J_3 \\ 1) J_1 &\leq h^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_0^h |f(x+h+u) - f(x+u)|^p \frac{\overline{w}(x+u; x+h+u)}{\overline{w}(x+u; x+h+u)} du \right]^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$$\overline{w}(x+u; x+h+u) = \frac{1}{h} \int_{x+u}^{x+h+u} w(t) dt \geq C_{41} \cdot \frac{1}{h} \int_{x+u}^{x+h+u} (1+t)^\beta dt \geq C_{41} (1+x+h+u)^\beta \geq C'_{41} h^\beta;$$

$$J_1 \leq C_{42} h^{-\frac{1}{p} - \frac{\beta}{p}} \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_x^{x+h} |f(z+h) - f(z)|^p \overline{w}(z; z+h) dz \right]^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{42} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ В } J_2, \text{ оценивая } T(x) &= \int_0^h \frac{1}{v^2} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)| du \right\} dv, \text{ приходим к } T(x) \leq \\ &\leq T_1^{\frac{1}{p}}(x) \cdot T_2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}(x) \cdot T_3^{\frac{1}{q}}(x); \text{ далее, } T_2(x) \leq \int_0^h t^{-\gamma \frac{pq}{q-p}} \left(\int_0^{h-t} |f(x+u+t) - f(x+u)|^p du \right) dt = \\ &= \int_0^h t^{-\gamma \frac{pq}{q-p}} \left(\int_x^{x+h-t} |f(z+t) - f(z)|^p \frac{\overline{w}(z; z+t)}{\overline{w}(z; z+t)} dz \right) dt. \text{ И } \overline{w}(z; z+t) \geq C_{43} (1+z+t)^\beta \geq C_{43} (2h)^\beta, \\ T_2(x) &\leq C_{44} h^{-\beta} \int_0^h t^{-\gamma \frac{pq}{q-p}} (\overline{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; t))^p dt \leq C'_{44} h^{-\beta + 1 + \nu p - \gamma \frac{pq}{q-p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Затем, } J_2 &\leq C_{45} h^{\varepsilon - \gamma + (1 + \nu p) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) - \beta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \times \\ &\quad \times \left(\int_{-1}^{-1+h} \left[\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v |f(x+v) - f(x+u)|^p du \right\} dv \right]^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= C_{45} h^{(\dots)} \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v \left(\int_{-1}^{-1+h} |f(x+v) - f(x+u)|^p \frac{\overline{w}(x+u; x+v)}{\overline{w}(x+u; x+v)} dx \right) du \right\} dv \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Тут также $\overline{w}(x+u; x+v) \geq C_{46} (1+x+v)^\beta \geq C_{46} (2h)^\beta$, и

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C_{47} h^{(\dots) - \frac{\beta}{p}} \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v [\overline{\psi}^{(p)}(f; -1+u; -1+h+v; v-u)]^p du \right\} dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C_{47} h^{(\dots) - \frac{\beta}{p}} \left(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p} + \gamma - \varepsilon)q} \left\{ \int_0^v (v-u)^{\nu p} du \right\} dv \right)^{\frac{1}{q}} = C_{49} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}} \end{aligned}$$

$$3) J_3 \text{ оценивается аналогично } J_2; \text{ в итоге, } J_3 \leq C_{52} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}.$$

$$\text{Соединяя оценки } J_1, J_2 \text{ и } J_3, \text{ получаем: } H_{1;1} \leq C_{40} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}.$$

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$. Введём средние

$$f_n^-(x) := \frac{n}{1+x} \int_{x-\frac{1+x}{n}}^x f(t)dt = \frac{n}{1+x} \int_0^{\frac{1+x}{n}} f(x-u)du = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x-(1+x)v)dv$$

непрерывные из-за абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что $f_n^- \in L_w^p[-1; 0]$: $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1; 0]} \leq \|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1; 0]} + \|f\|_{L_w^p[-1; 0]}$, а

$$\begin{aligned} \|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1; 0]} &= n \left(\int_{-1}^0 \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x} [f(x) - f(x-u)] w^{\frac{1}{p}}(x) \chi\left(\frac{1+x}{n} - u\right) du \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^p} |f(x) - f(x-u)|^p w(x) \chi^p\left(\frac{1+x}{n} - u\right) dx \right)^{\frac{1}{p}} du \leq \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_{-1+nu}^0 (1+x)^{-p} |f(x) - f(x-u)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} du \stackrel{(4)}{\leq} \\ &\leq C_{53} \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1} \left(\int_{-1+u}^0 |f(x) - f(x-u)|^p \bar{w}(x-u; x) dx \right)^{\frac{1}{p}} du \leq \\ &\leq M \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\nu} du = M' n^{-\nu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1; 0]} < \infty \Leftrightarrow f_n^- \in L_w^p[-1; 0]$.

Теперь возьмём $\forall h \in (0; \frac{1}{2})$ и оценим $\bar{\psi}^{(p)}(f_n^-; -1; 0; h) =$

$$\begin{aligned} &= n \left(\int_{-1}^{-\frac{h}{n}} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} [f(x+h-(1+x+h)v) - f(x-(1+x)v)] \bar{w}^{\frac{1}{p}}(x; x+h) dv \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^{-\frac{h}{n}} |f(x(1-v)-v+h(1-v)) - f(x(1-v)-v)|^p \bar{w}(x; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} dv \end{aligned}$$

Пусть $x(1-v)-v=y$, $h(1-v)=\tilde{h}$, тогда $x=\frac{y+v}{1-v}$, $1+x=\frac{1+y}{1-v}$; $dx=(1-v)^{-1}dy$; $-1 \rightarrow -1$, $-h \rightarrow -\tilde{h}-v$; $C_{54}(1+x)^\beta \leq w(x) \leq C'_{54}(1+x)^\beta$, и так же делаем замену $t(1-v)-v=s$ в $\bar{w}(x; x+h) \leq C_{55} \frac{1}{h} \int_y^{y+\tilde{h}} (1+s)^\beta ds \leq C_{56} \bar{w}(y; y+\tilde{h})$, откуда $\bar{\psi}^{(p)}(f_n^-; -1; 0; h) \leq$

$$\leq C_{57} n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^{-\frac{h}{n}-v} |f(y+\tilde{h}) - f(y)|^p \bar{w}(y; y+\tilde{h}) dy \right)^{\frac{1}{p}} dv \leq C_{57} n \int_0^{\frac{1}{n}} \tilde{h}^\nu dv \leq C_{58} h^\nu$$

То есть $f_n^- \in M_{13} \bar{\mathcal{H}}_{p; w}^{(\nu)}[-1; 0]$. Поэтому, применяя для f_n^- результаты п. (I): $\|f_n^-(x+h) - f_n^-(x)\|_{L^q[-1; -1+h]} \leq C_{59} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}$. Аналогично оценке $\|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1; 0]}$,

$$\|f_n^- - f\|_{L^q[-1; 0]} \leq \dots \leq \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1} \left(\int_{-1+u}^0 |f(x) - f(x-u)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} du$$

$\bar{w}(x; x+k) \geq C_3$, так что $\bar{\mathcal{H}}_{p; w}^{(\nu)}[-1; 1] \subseteq C_{61} \mathcal{H}_p^{(\nu)}[-1; 1]$. То есть $f \in C_{61} Lip(\nu; p)$, а значит, к ней применима теорема 1: $f \in C_{62} \mathcal{H}_q^{(\xi)}[-1; 1]$, где $\xi = \nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$.

Поэтому $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1; 0]} \leq C_{63} \int_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\xi} du = C_{64} n^{-\xi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Наконец, $H_{1; 1} = \|f(x+h) - f(x)\|_{L^q[-1; -1+h]} \leq$

$$\leq \|f_n^-(x+h) - f(x+h)\|_{L^q[-1; -1+h]} + \|f_n^-(x+h) - f_n^-(x)\|_{L^q[-1; -1+h]} +$$

$+ \|f_n^-(x) - f(x)\|_{L^q[-1; -1+h]} \leq C_{59} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}} + 2 \|f_n^- - f\|_{L^q[-1; 0]}$. Выбрав такое $n = n(h)$, что $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1; 0]} \leq h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}$, приходим к: $H_{1;1} \leq C_{65} h^{\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p}}$.

Объединяя оценки $H_{1;1}$, $H_{1;2}$ и H_1 с H_2 , получаем: $\psi_-^{(p)}(f; -1; 1; h) \leq C_{35} h^\nu$. Аналогично можно показать, что $\psi_+^{(p)}(f; -1; 1; h) \leq C_{35} h^\nu$, отчего $f \in M_{14} \mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Соединив её с (2), при $\nu p > \max\{-\alpha; -\beta\}$ получаем: $H_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[a; b]$.

Поэтому в условиях п. (b) теоремы 2, при дополнительных ограничениях на p , $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] \subseteq \overline{H}_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1; 1]$ для $\forall q \in [p; \frac{p}{1-\nu p})$ и $H_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] \subseteq H_{q;w}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}[-1; 1]$ для $\forall q \in [p; \frac{p(1+\min\{\alpha; \beta\})}{1-\nu p})$ (второе включение вытекает из теоремы 3 при $p \leftarrow q$ и $\nu \leftarrow \nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$). А именно, должно быть $p < \frac{p(1+\min\{\alpha; \beta\})}{1-\nu p} \Leftrightarrow \nu p > \max\{-\alpha; -\beta\}$.

Теперь рассмотрим класс $M \widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a; b] = \{f \in L_w^p[a; b]: \forall h \in (0; \frac{b-a}{2})$

$$\widehat{\psi}^{(p)}(f; a; b; h) = \left(\int_{a+h}^{b-h} |f(x+h) - f(x-h)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M h^\nu \}$$

Теорема 4. Пусть $\alpha, \beta \in (-1; 0]$. Тогда $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] = \widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$; точнее,

$$\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] \subseteq M' \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] \text{ и } \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1] \subseteq M'' \widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$$

Доказательство. 1) Пусть $f \in \widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$. Для $\forall h \in (0; 1)$

$$\begin{aligned} \overline{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; h) &= \left(\int_{-1}^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p \overline{w}(x; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\leq C_{66} \left(\int_{-1}^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p w(x + \frac{h}{2}) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \widehat{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; \frac{h}{2}) \leq M' h^\nu \end{aligned}$$

2) Пусть $f \in \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$. По (4): $w(x) \leq C_{67} \overline{w}(x-h; x)$ и $w(x) \leq C_{67} \overline{w}(x; x+h)$, $w(x) \leq C_{67} \cdot \frac{1}{2} [\overline{w}(x-h; x) + \overline{w}(x; x+h)] = C_{67} \overline{w}(x-h; x+h)$, значит, $\widehat{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; h) \leq C_{68} \left(\int_{-1+h}^{1-h} |f(x+h) - f(x-h)|^p \overline{w}(x-h; x+h) dx \right)^{\frac{1}{p}} = C_{68} \overline{\psi}^{(p)}(f; -1; 1; 2h) \leq M'' h^\nu$.

Таким образом, в силу (2) и теорем 3, 4 при $\nu p > \max\{-\alpha; -\beta\}$ классы $H_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$, $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$ и $\widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1; 1]$ совпадают.

Библиографические ссылки

1. Hardy G. H. A convergence criterion for Fourier series. // G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1928. — 28. — P. 122–147.
2. Ильин В. П. Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтльвуда. // В. П. Ильин // Труды МИАН СССР. — 1959. — Т. 53. — С. 128–144.

Надійшла до редколегії 24.04.2014