УДК 517.5

Т.А. Агошкова, В.Н. Трактинська

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЕЛЕМЕНТА НАЙКРАЩОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО НАБЛИЖЕННЯ У ПРОСТОРАХ ІЗ ЗМІШАНОЮ ІНТЕГРАЛЬНОЮ МЕТРИКОЮ

Отримано критерій елемента найкращого несиметричного наближення для функцій багатьох змінних у просторах із змішаною інтегральною метрикою.

Нехай $L_{p_1,\dots,p_n}=L_{\bar{p}}$ – простір сумовних на паралелепіпеді $K=[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_n;b_n]$ функцій від n змінних $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(\bar{x})$. Якщо $0<\alpha,\ \beta<\infty$ та $f_\pm(x_1,\dots,x_n)=\max\{\pm f(x_1,\dots,x_n);0\}$, то покладемо,

$$\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}f(x_1,\dots,x_n)=\alpha\cdot\operatorname{sgn}f_+-\beta\cdot\operatorname{sgn}f_-\quad |f|_{\alpha,\beta}=\alpha\cdot f_++\beta\cdot f_-$$

Визначимо несиметричну норму у просторі $L_{\bar{p}}$ наступним чином:

$$\|f\|_{\bar{p},\alpha,\beta}=\|f\|_{p_1,\dots,p_n;\alpha,\beta}=\|\alpha f_++\beta f_-\|_{p_1,\dots,p_n}=$$

$$=\left(\int_{a_n}^{b_n}\left\{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\left[\int_{a_1}^{b_1}|f(\bar{x})|_{\alpha,\beta}^{p_1}dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots dx_{n-1}\right\}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}\tag{1}$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\dots,p_i;\alpha,\beta}=\left(\int_{a_i}^{b_i}\cdots\left\{\int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}}\left[\int_{a_k}^{b_k}|f(\bar{x})|_{\alpha,\beta}^{p_k}dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}}dx_{k+2}\right\}^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}}\dots dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1\le k<n,\ 1<i\le n$.

Якщо $G\subset L_{\bar{p}},\ 0<\alpha,\beta<\infty$, то величина $E(f,G)_{p_1,\dots,p_n;\alpha,\beta}=\inf\limits_{g\in G}\|f-g\|_{p_1,\dots,p_n;\alpha,\beta}$ називається найкращим (α,β) – наближенням функції $f(\bar{x})$ множиною G у метриці $L_{\bar{p}}$. Поряд з простором $L_{p_1,\dots,p_n}$ розглядатимемо простір $L_{q_1,\dots,q_n}$, де числа p_i та q_i спряжені: $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1,\quad i=\overline{1,n}$.

Введемо також до розгляду класи $L_{\infty,p_2,\dots,p_n}$, $L_{p_1,\infty,p_3,\dots,p_n}$, $\dots$, $L_{p_1,\dots p_{n-1},\infty}$ функцій $f(\bar{x})$, норми яких визначаються за формулами:

$$\| f \|_{\infty,p_2,\dots,p_n,\alpha,\beta} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left\{ \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left[\int_{a_2}^{b_2} \left(\operatorname*{esssup}_{[a_1,b_1]} | f |_{\alpha,\beta} \right)^{p_2} dx_2 \right]^{\frac{p_3}{p_2}} \dots dx_{n-1} \right\}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

$$\| f \|_{p_1,\dots,p_{n-1},\infty,\alpha,\beta} = \operatorname*{esssup}_{[a_n,b_n]} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} | f |_{\alpha,\beta}^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p_{n-1}}},$$

$$\| f \|_{p_1,\dots,p_{i-1},\infty,p_{i+1},\dots,p_n,\alpha,\beta} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \dots \left[\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \left[\operatorname*{esssup}_{[a_i,b_i]} | f |_{p_1,\dots,p_{i-1}} \right]^{p_{i+1}} dx_{i+1} \right]^{\frac{p_{i+2}}{p_{i+1}}} \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

де $1 < i \le n$, та скінчені.

Питання характеризації елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою для функцій двох змінних були досліджені Г.С. Смирновим [2] в 1973 році. Його результати були розповсюджені В.М.Трактинською на випадок функцій багатьох змінних [4], а для функцій двох змінних – на випадок несиметричного наближення [5]. Мета цієї роботи отримати критерій елемента найкращого несиметричного наближення для функцій багатьох змінних у просторах із змішаною інтегральною метрикою.

Повторюючи міркування відповідної теореми про вид лінійного функціоналу, неважко отримати наступне твердження

Теорема 1. *Кожний лінійний неперервний функціонал, заданий у просторі $L_{\bar{p}}$, має вигляд*

$$F(f) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(\bar{x}) \alpha(\bar{x}) dx_1 \dots dx_n,$$

де $f(\bar{x})$ – будь-яка функція з $L_{\bar{p}}$, а $\alpha(\bar{x})$ – деяка функція з $L_{\bar{q}}$, що визначається за функціоналом F, і при цьому: $\| F \| = \| \alpha \|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}}$.

Нехай на K задана лінійно незалежна система функцій $\varphi_k \in L_{\bar{p}}$ $(k = \overline{1,n})$. Позначимо $H_n = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Далі нам знадобляться наступні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\varphi\left(\overline{x}\right) \in L_{\overline{q}}$ *та у просторі* $L_{\overline{q}}$ *несиметрична норма введена наступним чином:* $\| \varphi \|_{\overline{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \| \alpha^{-1}\varphi_+ + \beta^{-1}\varphi_- \|_{\overline{q}}$.

Тоді:
$$\sup_{\|f\|_{\overline{p},\alpha,\beta} \le 1} \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f\left(\overline{x}\right)\varphi\left(\overline{x}\right) dx_1 \ldots dx_n = \| \varphi \|_{\overline{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} .$$

Лема 2. *Якщо функція* $f\left(\overline{x}\right) \in L_{\overline{p}}$, *тоді*

$$\| f \|_{\overline{p},\alpha,\beta} = \sup_{\|g\|_{\overline{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f\left(\overline{x}\right) g\left(\overline{x}\right) dx_1 \ldots dx_n . \qquad (2)$$

Якщо $\| f \|_{\overline{p},\alpha,\beta} > 0$ *,тоді sup в правій частині (2) досягається для функції*

$$g_0\left(\overline{x}\right) = \begin{cases} \| f \|^{1-p_n}_{\overline{p},\alpha,\beta} | f |^{p_n - p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} \times \ldots \times | f |^{p_2-p_1}_{p_1,\alpha,\beta} | f |^{p_1-1}_{\alpha,\beta} \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f, \\ \qquad\qquad\qquad \text{якщо } | f |^{p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} > 0 \\ 0, \qquad\qquad\quad \text{якщо } | f |^{p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} = 0 \end{cases}$$

Функція $g_0\left(\overline{x}\right)$ *буде єдиною (якщо хоча б одне з* $p_i = 1$*,то за припущенням, що* $f\left(\overline{x}\right) \neq 0$ *майже скрізь на* K*).*

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p < \infty$ *та* $0 < \alpha, \beta < \infty$*. Тоді для будь-якої функції*

$$f\left(\overline{x}\right) \in L_{\overline{p}} : E_n(f)_{\overline{p},\alpha,\beta} = \sup \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f\left(\overline{x}\right) g\left(\overline{x}\right) dx_1 \ldots dx_n , \qquad (3)$$

де $\| g \|_{\overline{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1$ *і* $\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_n\left(\overline{x}\right) g\left(\overline{x}\right) dx_1 \ldots dx_n = 0$ *для будь-якого* $P_n \in H_n$.

Верхня межа у (3) досягається на деяких функціях $\varphi\left(\overline{x}\right) \in L_{\overline{q}}$ з $\| \varphi \|_{\overline{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1$.

Теорема 3. *Нехай* H *– підпростір лінійного простору X, p(x) – задана на X несиметрична напівнорма. Якщо* $p(x, H) > 0$, *тоді відношення* $p(x - u_0) = \inf p(x - u)$ *для елемента* $u_0(x,y) \in H$ *виконується тоді і тільки тоді, коли існує лінійний функціонал* $f_0(x,y)$, *заданий на X, який задовольняє наступні умови:*

1) $\sup\limits_{x \in X:\, p(x) \le 1} f_0(x) = 1$,

2) $p(x - u_0) = f_0(x)$,

3) $f_0(u) = 0$, $\forall u \in H$.

З теореми 3, враховуючи вигляд лінійного функціоналу в $L_{\bar{p}}$, одразу отримуємо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай* H – *підпростір простору* $\mathrm{L}_{\bar{p}}$ *та* $f(\bar{x}) \in L_{\bar{p}} \backslash \mathrm{H}$. *Відношення* $\| f - u_0 \|_{\bar{p},\alpha,\beta} = \inf\limits_{u \in H} \| f - u \|_{\bar{p},\alpha,\beta}$ *для* $u_0(\bar{x}) \in \mathrm{H}$ *має місце тоді і тільки тоді, коли існує функція* $\alpha_0(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}$ *яка задовольняє умови:*

$$1)\ \| \alpha_0 \|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1,$$

$$2)\ \| f - u_0 \|_{\bar{p},\alpha,\beta} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(\bar{x}) \alpha_0(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n ,$$

$$3)\ \sup_{u \in H} \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} u(\bar{x}) \alpha_0(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n = 0,\ \forall u \in \mathrm{H}.$$

Сформульований критерій пов'язує характеризацію найближчого елемента з існуванням визначеної неявно функції.

Теорема 5. *Нехай* $f(\bar{x}) \in L_{\bar{p}} \backslash H_n$. *Для того щоб поліном* $P_m^*(\bar{x}) \in H_n$ *був елементом найкращого* (α, β)*- наближення для функції* $f(\bar{x})$, *достатньо та (у випадку* $p = 1$ *або* $q - 1$ *за умови* $\mathrm{mes}\{ \bar{x} \in K: f(\bar{x}) = P_m^*(\bar{x})\} = 0$*) необхідно, щоб для функції*

$$\alpha(\bar{x}) = \begin{cases} | f - P_m^* |^{p_n - p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} \times \ldots \times | f - P_m^* |^{p_2 - p_1}_{p_1,\alpha,\beta} \, | f - P_m^* |^{p_1 - 1}_{\alpha,\beta} \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f - P_m^*), & \\ \qquad \text{якщо } | f - P_m^* |^{p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} > 0 & \\ 0, \qquad \text{якщо } | f - P_m^* |^{p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta} = 0 & \end{cases}$$

та будь-якого полінома $P_m \in H_n$ *мала місце рівність*

$$\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x}) \alpha(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n = 0.$$

Доведення. Достатність. Очевидно, що:

$$\| \alpha \|_{\bar{q},\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \| f - P_m^* \|^{p_n - 1}_{\bar{p},\alpha,\beta}, \quad \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x}) \alpha(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n = \| f - P_m^* \|^{p_n}_{\bar{p},\alpha,\beta}. \tag{4}$$

З твердження випливає, що:

$$\int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(\bar{x}) \alpha(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n \le E_m(f)_{\bar{p},\alpha,\beta} \| f - P_m^* \|^{p_n - 1}_{\bar{p},\alpha,\beta} \tag{5}$$

Порівнюючи (4) та (5) отримаємо, що $\| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta} \le E_m(f)_{\bar{p},\alpha,\beta}$.

Необхідність. Нехай P_m^* – поліном найкращого (α, β)- наближення для функції $f(\bar{x})$ у просторі $L_{\bar{p}}$.Тоді у силу теореми 4, знайдеться функція $\alpha_0(\bar{x}) \in L_{\bar{q}}$. яка задовольняє умови:

$$1) \ \| \alpha_0 \|_{\bar{q},a^{-1},b^{-1}} = 1,$$

$$2) \ \| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta} = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x}) \alpha_0(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n,$$

$$3) \ \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x}) \alpha_0(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n = 0, \quad \forall P_m \in H_n.$$

За лемою 2 умова 2) буде виконуватися для функції

$$\alpha_0(\bar{x}) = \begin{cases} \| f - P_m^* \|_{\bar{p},\alpha,\beta}^{1-p_n} \, | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_n - p_{n-1}} \times \ldots \times | f - P_m^* |_{p_1,\alpha,\beta}^{p_2 - p_1} \, | f - P_m^* |_{\alpha,\beta}^{p_1 - 1} \times \\ \times \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} (f - P_m^*), & \text{якщо } | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} > 0 \\ 0, & \text{якщо } | f - P_m^* |_{p_1,\ldots,p_{n-1},\alpha,\beta}^{p_{n-1}} = 0 \end{cases}.$$

Причому за умови даної теореми функція $\alpha_0(\bar{x})$ буде єдиною. Але тоді з умови

3) отримуємо: $$\int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} P_m(\bar{x}) \alpha_0(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n = 0, \quad \forall P_m(\bar{x}) \in H_n.$$

Таким чином теорема 5 повністю доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций /В.Ф. Бабенко // Укр. мат. журн. – Т.34. – №4 – 1982. – С. 409 – 416.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения/Н.П. Корнейчук. – М., – 1987. – С. 21 – 24
3. **Смирнов Г.С.** Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой /Г.С. Смирнов // Укр. мат. журн. – Т.25. – №1 – 1973. – С. 134 – 138.
4. **Трактинская В.Н.** Характеризация элемента наилучшего интегрального приближения функций многих переменных /В.Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – Вип.8. – 2007. – С. 134 – 136.
5. **Трактинская В.Н.** Критерий элемента наилучшего несимметричного приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой /В.Н. Трактинская // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – Вип.3. – 1998. – С. 33 – 41.

Надійшла до редколегії 15.01.09