

ОЦЕНКА СНИЗУ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАДИУСА ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПОЛОВИНЫ КОНУСА

Знайдено оцінки знизу найменшого радіуса кулі, в якому дана множина є множиною Помпейю. В якості множини розглядається половина прямого кругового конуса з радіусом основи 1 і висотою $h > 1$. Для $h > 3$ знайдено точне значення екстремального радіуса Помпейю.

Введение. Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$, $M(n)$ – группа движений в R^n , $Mot(A, B) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset B\}$, $B_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$. Компактное множество $A \subset R^n$ называется множеством Помпейю в B (будем обозначать это $Pomp(B)$), если всякая локально суммируемая функция $f : B \rightarrow C$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0, \quad \forall \lambda \in Mot(A, B), \quad (1)$$

равна нулю почти всюду в B . Классическая проблема Помпейю об описании класса $Pomp(R^n)$ изучалась в [1; 2] с обширной библиографией. Из результата [3] следует, что если граница множества A липшицева, но не вещественно-аналитическая, то $A \in Pomp(R^n)$. В.В. Волчковым было доказано, что если некоторое множество $A \in Pomp(R^n)$, то $A \in Pomp(B_R)$ при достаточно большом R . В связи с этим в [4] поставлена следующая

Проблема. Для данного множества A найти

$$\mathfrak{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in Pomp(B_R)\}$$

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathfrak{R}(A)$ получены в [5]. Отметим, что множества для которых были найдены точные значения или оценки величины $\mathfrak{R}(A)$, можно разбить на следующие типы по составу их границ:

1. Состоит из отрезков или плоских участков (многоугольники, многогранники) ([4, Part 4, Chapter 2,3], [5]).
2. Эллипсоиды ([4, Part 4, Chapter 4]).
3. Полушар ([4, Part 4, Chapter 5]).
4. Содержит дуги окружностей (секторы [7], треугольник Рело [8]).
5. Цилиндры в R^3 , в основании которых лежат круговые сегменты ([9]).

То есть, это были или плоские множества или такие, которые можно получить из плоских путем обобщения на большую размерность.

В данной работе получены оценки снизу величины $\mathfrak{R}(A)$ для множества

$$A = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : 0 \leq z \leq h(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), y \geq 0 \right\} \quad (2)$$

половины прямого кругового конуса с радиусом основания 1 и высотой $h > 1$. Для случая $h > 3$ получено точное значение величины $\mathfrak{R}(A)$.

Формулировка основного результат. Всюду в дальнейшем полагается, что $n = 3$ и множество A имеет вид (2). Следуя [4, Part 4], введем следующие классы функций. Пусть $\mathfrak{F}(A, B)$ – множество функций из $L_{loc}(B)$, удовлетворяющих (1). Для $k = 1, 2, \dots, \infty$ положим $\mathfrak{F}^k(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^k(B)$. Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть $h > 1$, тогда $\mathfrak{R}(A) \geq \frac{5h^2 + 1}{8h}$. При $h > 3$ имеет место

равенство. $\mathfrak{R}(A) = (5h^2 + 1)/8h$.

Геометрические конструкции. Для компактного множества K обозначим

$$r^*(K) = \inf \{R > 0 : \lambda K \subset B_R, \lambda \in M(n)\}$$

– наименьший из радиусов шаров, содержащий компактное множество K . Тогда

$$r^*(A) = \begin{cases} (h^2 + 1)/(2h), & h > 1 \\ 1, & h \leq 1 \end{cases}$$

Пусть вершины полукуноса расположены в соответствии с рис.1а и $\bar{B}_R = \{x \in R^3 : |x| \leq R\}$. Обозначим $Max_*(R, h)$ и $Min_*(R, h)$ –соответственно наибольшее и наименьшее расстояние от центра шара \bar{B}_R до объекта $*$ (вершины B , ребра AB или основания) полукуноса λA при всех возможных движениях $\lambda \in Mot(A, \bar{B}_R)$. Для определения этих величин заметим, что экстремальные расстояния достигаются при расположениях треугольника ABC в наибольшем сечении шара, то есть в круге содержащем центр шара. Поэтому далее будут рассматриваться положения треугольника ABC в круге радиуса R .

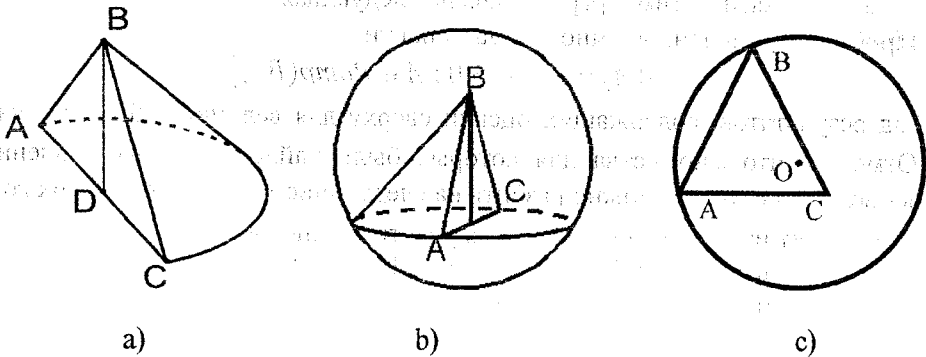


Рис.1

На рис.1б мы видим ближайшее расстояние от вершины B до центра шара. Двигая прямую AC в плоскости основания полукуноса или в плоскости ABC можно только увеличить расстояние от вершины B до центра шара. Повороты не дают нового результата из-за симметричности шара. Остальные же движения полукуноса в шаре получаются путем совмещения указанных выше. То есть, рис. 1б действительно изображает $Min_B(R, h)$. Очевидно, этот рисунок показывает и $Max_{осн}(R, h)$.

Рис. 1с изображает $Max_{AB}(R, h)$. Очевидно, что наибольшим расстоянием AB до центра шара будет случай, когда вершины A и B лежат на сфере радиуса

R . В этом случае, для удобства вычислений расстояния, мы всегда можем расположить полукуноус в наибольшем сечении шара.

Решив геометрические задачи по нахождению упомянутых расстояний для соответствующих экстремальных положений λA в \bar{B}_R , изображенных на рис. 1 (b-c), приходим к следующим результатам:

$$\text{Max}_{\text{очн}}(R, h) = h - R, \quad \text{Min}_{\text{очн}}(R, h) = h - R, \quad \text{Max}_B(R, h) = R,$$

$$\text{Min}_B(R, h) = h - \sqrt{R^2 - 1}, \quad \text{Max}_{AB}(R, h) = \sqrt{R^2 - \frac{h^2 + 1}{4}}.$$

Обозначим $\tilde{r}(R, h)$ - наименьший радиус шарового слоя, в котором находятся основание и вершина B фигуры λA при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \bar{B}_R)$. Тогда

$$\tilde{r}(R, h) = \min\{\text{Min}_{\text{очн}}(R, h), \text{Min}_B(R, h)\} = h - R.$$

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $R > 0$, $\varepsilon \in (0, R)$ и $g \in C^\infty[0, R)$. Тогда существует функция $f \in C^\infty[0, R)$, $f \neq 0$, такая что

$$\int_R^t \xi \sqrt{\xi^2 - t^2} f(\xi) d\xi = g(t), \quad t \in (0, R - \varepsilon), \quad \xi \in (R, t).$$

Доказательство. В указанном выше интеграле сделаем замену $\xi = \frac{1}{x}$, тогда

$$\int_{1/R}^{1/t} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2} - t^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = g(t), \quad \int_{1/R}^{1/t} \frac{1}{x^4} \sqrt{\frac{1}{t^2} - x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -g(t)/t.$$

Заменим $\frac{1}{x^4} f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$, $y = \frac{1}{t}$ и $G(y) = -\frac{g(t)}{t}$ (отметим, что $G(y) \in C^\infty$).

Тогда исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int_{1/R}^y h(x) \sqrt{y^2 - x^2} dx = G(y). \quad \text{После замен } y^2 = z, \quad x^2 = \tau \text{ и } \frac{h(x)}{x} = H(\tau), \text{ имеем}$$

$$\int_{1/R^2}^z \sqrt{z - \tau} \cdot H(\tau) d\tau = 2G(\sqrt{z}) = F(z).$$

Дифференцируя интеграл по z , получаем $\int_{1/R^2}^z \frac{H(\tau)}{\sqrt{z - \tau}} d\tau = 2F'_z(z) = \Lambda(z)$.

Отсюда имеем

$$H(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\Lambda\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\sqrt{z - \frac{1}{R^2}}} + \int_{1/R}^z \frac{\Lambda'_\tau(\tau) d\tau}{\sqrt{z - \tau}} \right].$$

Возвращаясь к выполненным заменам, получаем

$$H(z) = \frac{h(y)}{y} = \frac{\frac{1}{y^4} \cdot f\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \frac{t^4 f(t)}{1/t} = t^5 f(t).$$

То есть

$$f(t) = \frac{1}{\pi \cdot t^5} \left[\frac{\Lambda\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\sqrt{z - \frac{1}{R^2}}} + \int_{1/R}^z \frac{\Lambda'_z(\tau) d\tau}{\sqrt{z - \tau}} \right].$$

Учитывая, что в заменах мы использовали функции из $C^\infty[0, R)$, делаем вывод, что полученное решение $f(t) \in C^\infty[0, R)$.

Лемма 2. Пусть $R > 0, \varepsilon \in (0, R)$. Тогда существует функция $f \in C^\infty[0, R), f \neq 0$, такая что

$$\int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy = 0, \forall x, y: x^2+y^2 < R, \forall s \in R^1, t \in (-R+\varepsilon, R-\varepsilon).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy = \\ & = \int_{-\sqrt{R^2-t^2}}^0 f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy + \int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} f(\sqrt{t^2+y^2})(y+s)^2 dy \end{aligned}$$

Сделаем замену $\xi = \sqrt{t^2+y^2}$, тогда предыдущее равенство можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \int_R^t f(\xi)(s + \sqrt{\xi^2 - t^2})^2 \cdot \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} + \int_t^R f(\xi)(s + \sqrt{\xi^2 - t^2})^2 \cdot \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} = \\ & = \int_t^R f(\xi)(s^2 + \xi^2 - t^2) \cdot \frac{2\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} = \int_t^R f(\xi) \cdot \frac{2\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} + \int_t^R 2\xi f(\xi) \sqrt{\xi^2 - t^2} d\xi \end{aligned}$$

Подберем функцию $g(t)$ из леммы 1, так чтобы $g(t) = 0$ при $t \in [0, R-\varepsilon)$ и $g(t) \neq 0$ при $t \in (R-\varepsilon, R)$. Таким образом, два последних интеграла равны нулю. Следовательно, утверждение леммы доказано. Утверждение леммы 2 переносится и на трехмерный случай. Пусть $t \in [0, R-\varepsilon)$ и L_t - прямая, параллельная одной оси Oz . Тогда верна следующая

Лемма 3. Пусть $R > 0, \varepsilon \in (0, R)$. Тогда существует функция $f \in C^\infty[0, R), f \neq 0$, такая что

$$\int_{L_t} f(x^2+y^2)(y+s)^2 dy = 0, \forall x, y: x^2+y^2 < R, \forall s \in R^1, t \in (-R+\varepsilon, R-\varepsilon)$$

Доказательство этой леммы очевидно сводится к доказательству леммы 2, если провести через прямую L_t и центр системы координат плоскость.

Следующая лемма будет необходима для построения нетривиальной функции из класса $\mathfrak{Z}(\lambda A, B)$ для некоторых λ и R .

Лемма 4. Пусть $0 < \tilde{r} < R$, функция $f \in C^\infty(R^n)$: $f \neq 0$ в $B_{\tilde{r}, \infty}$, радиальная и имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние d от которых до центра шара B_R , $d < \tilde{r}$. Тогда для любого полуконуса $\lambda A \subset B_R$, где $\lambda \in \text{Mot}(A, \bar{B}_R)$, вершина B и основание которого лежат в шаровом слое $B_{\tilde{r}, R}$, а прямолинейные отрезки имеют непустое пересечение с шаром $B_{\tilde{r}}$ интеграл $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ для

любых $\lambda \in \text{Mot}(A, B_R)$

Доказательство. Доопределим функцию f нулем во внешности шара B_R . Тогда интеграл от функции f по данному полуконусу λA не изменится, если вместо него рассмотреть бесконечный полуконус $\tilde{\lambda A}$, который получается из данного путем продления образующих.

$$\int_{\tilde{\lambda A}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\lambda A \cap B_{\tilde{r}}} f(x, y, z) dx dy dz + \int_{\lambda A \setminus B_{\tilde{r}}} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Рассмотрим случай, когда вершина B является началом координат. При интегрировании перейдем к сферической системе координат

$$\int_{\tilde{\lambda A}} f(x, y, z) dx dy dz = \left[\begin{array}{l} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{array} \right] = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} \rho^2 f(\rho, \theta, \varphi) d\rho \right) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где $\Omega = \{\theta, \varphi\}$. По лемме 3 внутренний интеграл последнего равенства равен нулю. Мы рассмотрели случай, когда вершина B нашей фигуры является центром начала координат. Рассматривать поворот не имеет смысла в силу симметричности шара. Все остальные положения полуконуса являются результатом сдвига. Таким образом, теорема доказана.

Доказательство основного результата. Покажем сначала, что при $R < \frac{5h^2 + 1}{8h}$ фигура λA удовлетворяет условию леммы 4. Максимальное расстояние образующих полуконуса до центра шара B_R не должно превышать \tilde{r} , а его основание и вершина B должны находиться в шаровом слое $B_{\tilde{r}, R}$. Эти условия обеспечивает система уравнений

$$\begin{cases} \text{Max}_{AB}(h, R) < \tilde{r} \\ \tilde{r} > 0 \end{cases}$$

или, что то же самое

$$\begin{cases} \sqrt{R^2 + \frac{h^2 + 1}{4}} < h - R \\ h - R > 0 \end{cases}$$

Решив данную систему, получаем

$$R < \frac{5h^2 + 1}{8h} \text{ при } h \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right).$$

Так как фигура λA ($\lambda \in \text{Mot}(A, \bar{B}_R)$) удовлетворяет условиям леммы 4 при $h > 1$, то для функции $f \in C^\infty(R^n)$, также удовлетворяющей условиям леммы 4, верно следующее

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \text{ для любых } \lambda \in \text{Mot}(A, B_R).$$

Таким образом, при $R < \frac{5h^2 + 1}{8h}$ данная функция является примером ненулевой функции из класса $\mathfrak{F}^\infty(A, B)$.

Итак, имеем оценку снизу для $\mathfrak{R}(A) \geq \frac{5h^2 + 1}{8h}$ при $h > 1$. В [10] получена оценка сверху величины $\mathfrak{R}(A)$ для $h > 0$. Учитывая, что при $h > 3$ нижняя и верхняя оценки совпадают, найдено точное значение $\mathfrak{R}(A) = \frac{5h^2 + 1}{8h}$ для фигуры λA ($\lambda \in \text{Mot}(A, B_R)$).

Применения полученного результата. Теорема 1 позволяет получить достаточное условие замкнутости в пространстве $L_p(B_R)$ ($1 \leq p < \infty$) системы функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x) : \lambda \in \text{Mot}(A, B_R)\} \quad (3)$$

Здесь χ_A — характеристическая функция множества A , то есть

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $h > 3$, $R > r^*(A)$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда система функций (3) замкнута в $L_p(B_R)$ при $R \geq \frac{5h^2 + 1}{8h}$ и незамкнута при $R < \frac{5h^2 + 1}{8h}$.

Доказательство. Пусть существует функция $f \in L_p(B_R)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, которая ортогональна системе функций (3). То есть для любого $\lambda \in \text{Mot}(A, B_R)$ верно равенство

$$\int_{B_R} f(x) \chi_{\lambda A} dx = 0.$$

Учитывая определение индикатора множества, последнее утверждение можно переписать в виде $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ для любого $\lambda \in \text{Mot}(A, B_R)$, что означает

$f \in \mathfrak{I}(A, B)$. Учитывая, что $R \geq \frac{5h^2 + 1}{8h}$, по теореме 1 получаем $f \equiv 0$. Отсюда

следует замкнутость системы (3) при $R \geq \frac{5h^2 + 1}{8h}$. При $R < \frac{5h^2 + 1}{8h}$ из доказательства теоремы 1 следует, что существует функция $f \in C^\infty[0, R]$, $f \neq 0$ такая что $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ для любого $\lambda \in \text{Mot}(A, B_R)$.

Следовательно, для такой ненулевой функции выполняется равенство $\int_{B_R} f(x) \chi_{\lambda A} dx = 0$, то есть она ортогональна системе функций (3). Таким образом

получаем, что система функций (3) незамкнута при $R < \frac{5h^2 + 1}{8h}$.

Библиографические ссылки

1. **Zalcman L.** A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations/ed. B. Fuglede et al., –1992. – P. 185–194.
2. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of Pompeiu problem’ in Radon Transforms and Tomography //Contemp. Math. – 2001. –Vol. 278. – P. 69 – 74.
3. **Williams S. A.** A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. – 1976. –Vol. 223. – P. 183-190.
4. **Volchkov V.V.** Integral Geometry and Convolution Equation // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London – 2003. – 454 p.
5. **Berenstein C. A., Gay R.** Le problem de Pompeiu locate // J. Anal. Math. –1989. – Vol.52. – P. 133 – 166.
6. **Волчков В. В.** О функциях с нулевыми интегралами по кубам/В.В. Волчков// Укр. мат. ж. – 1991. – Т. 43, № 6. – С. 859 – 863.
7. **Машаров П. А.** Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю/П.А. Машаров// Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
8. **Машаров П. А.** Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело /П.А. Машаров// Вестник Дніпропетр. ун-ту. Математика, Вип. 6. –2001. – С. 72 – 81.
9. **Машаров П. А.** Про циліндри з локальною властивістю Помпейю/П.А. Машаров // Вістник Донецького національного ун-ту. Серія А. Природничі науки.– 2000, № 1. – С. 21-25.
10. **Елец Л. В.** Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю /Л.В. Елец, П.А. Машаров // Укр. мат. журн. – 2009. Т. 61 – С. 61–72.

Надійшла до редколегії 26.02.09