УДК 517.5

А. Н. Пасько
Днепропетровский национальный университет

ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С УЧЁТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

Отримані асимптотично точні оцінки наближення функцій деяких класів сингулярних інтегралів алгебраїчними поліномами з урахуванням положення точки на відрізку.

Пусть W_∞^r, r>0 – класс определённых на отрезке [–1; 1] функций f_r, представимых в виде

$$f_r(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)dt+P(x),$$

где Γ(r) – гамма-функция Эйлера, функция f измерима и $|f(x)|\le 1$ почти всюду, а P(x) – алгебраический многочлен степени не выше [r–1].

Обозначим через $\breve{W}_\infty^r$ и $\overline{W}_\infty^r$ классы заданных на отрезке [–1;1] функций, представимых в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}\rho(t)dt,\ x\in(-1;1)$$

(интеграл понимается в смысле главного значения), где $u\in W_\infty^r$, а $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$ для $\breve{W}_\infty^r$ и $\rho(t)=1$ для $\overline{W}_\infty^r$.

В 2001 году В.П. Моторный [1] доказал следующие теоремы

Теорема А. *Для любого числа r>0 и любой функции* $f\in\breve{W}_\infty^r$ *существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}(x)$ *степени не выше* $n\ge r+1$, *такая, что для всех* $x\in[-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-P_{n,r}(x)\right|\le\frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1}+C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r\ln n}{n^{r+1}},\qquad(1)$$

где

$$\widetilde{K}_r=\frac{4\cos\frac{\pi r}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}},\qquad \text{если } 0<r\le 1/2, \text{ и}$$

$$\widetilde{K}_r=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r-\frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}}\right|,\qquad \text{если } r>1/2,$$

а $\gamma_r \in (0;\pi]$ – корень уравнения $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^r} = 0$.

Величина C_r зависит только от r.

Теорема B. *Пусть* $f \in \overline{W}_{\infty}^r$ *для некоторого натурального r, и на концах отрезка [–1;1] функция f(x) со всеми производными до r–1-го порядка включительно обращается в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}(x)$ *степени, не выше* $n \geq r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$\left|f(x) - P_{n,r}(x)\right| \leq \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (2)$$

где C_r зависит только от r.

В настоящей работе получены аналоги для односторонних приближений двух приведенных выше теорем, в случае, когда r – натуральное.

А именно имеют место две теоремы

Теорема 1. *Для любого натурального r и любой функции* $f \in \breve{W}_{\infty}^r$ *существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}^{+}(x)$ *степени не выше* $n \geq 2r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r} \ln n}{n^{r+1}}, \qquad (3)$$

где C_r зависит только от r.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \overline{W}_{\infty}^r$ *для некоторого натурального r, и на концах отрезка [–1;1] функция f(x) со всеми производными до r–1-го порядка включительно обращается в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}^{+}(x)$ *степени, не выше* $n \geq 2r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \qquad (4)$$

где постоянная C_r зависит только от r.

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобится следующая, полученная в [2] лемма.

Лемма 1. *Для любого* $r \in N$ *и любого натурального* $n \geq 2r$ *существует алгебраический полином* $h_{n,r}^{+}(x)$ *степени не выше n, удовлетворяющий неравенству*

$$0 \leq h_{n,r}^{+}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \leq \frac{2\pi r}{n}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}. \qquad (5)$$

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Пусть r – натуральное число и $f \in \breve{W}^r_\infty$. Тогда в силу (1) для последовательности многочленов $P_{n,r}(x)$, существование которой гарантируется теоремой А, выполняется неравенство

$$0 \le P_{n,r}(x) - f(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \ln n}{n^{r+1}} \le$$

$$\le \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + 2C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \ln n}{n^{r+1}}. \qquad (6)$$

Рассмотрим случай нечётного r. Умножив (5) на величину $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$ и сложив это неравенство с (6), получим, после несложных преобразований, что неравенство (3) удовлетворяется для многочлена

$$P^+_{n,r}(x) = P_{n,r}(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r h^+_{n,r}(x)\frac{\ln n}{n^{r+1}}.$$

Рассмотрим случай чётного r. Известно, что для любого n существует алгебраический многочлен $q_n(x)$, такой что

$$\left|\sqrt{1-x^2} - q_n(x)\right| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Из этого следует, что для каждого $n \ge (r-2)/2$ существует многочлен $q^+_{n-\frac{r-2}{2}}(x)$, такой что

$$0 \le q^+_{n-\frac{r}{2}}(x) - \sqrt{1-x^2} \le \frac{\pi}{n-\frac{r}{2}}. \qquad (7)$$

Сложив (6) с неравенством (5), умноженным на $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$, и неравенством (7), умноженным на $\frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r$, получим, что неравенство (3) удовлетворяется для многочлена

$$P^+_{n,r}(x) = P_{n,r}(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r q^+_{n-\frac{r}{2}}(x) + C_r h^+_{n,r}(x)\frac{\ln n}{n^{r+1}}.$$

Теорема 1 доказана. Теорема 2 доказывается аналогичным образом.

Библиографические ссылки

1. **Моторный В.П.** Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр.. матем. журн. – 2001, Т. 53, №3. – С. 331 – 345.
2. **Пасько А.Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке // Вісник Дніпропетр. Уні-ту. – 2005. Математика.– Вип. 10. – С. 86 – 91.

Надійшла до редколегії 24.01.08