УДК 517.5

В. Ф. Бабенко*,**, Г. С. Жиганова*

*Днепропетровский национальный университет

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины

О НАИЛУЧШИХ L_2-ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ВЕЙВЛЕТ

Одержані точні нерівності типу Джексона для найкращих наближень в $L_2(\mathbf{R}^m)$ функцій за допомогою частинних сум вейвлет-рядів у випадку багатовимірних аналогів вейвлет Шеннона-Котельникова.

Вопрос о неравенствах типа Джексона в различных функциональных пространствах с различными модулями непрерывности имеет богатую историю [1; 2; 3; 4]. Опишем некоторые известные результаты, относящиеся к точным неравенствам Джексона в пространствах L_2.

Первые точные результаты в этой области принадлежат Н. И. Черных [5; 6]. В [5] он доказал, что

$$E_n(f)_{L_2(0,2\pi)} < 2^{-1/2}\omega(f,\pi/n)_{L_2(0,2\pi)}, \tag{1}$$

где $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции $f(t)\in L_2(0,2\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка n, а $\omega(f,t)_{L_2(0,2\pi)}$ – модуль непрерывности функции f. При этом константа $2^{-1/2}$ неулучшаема при каждом n. Неравенство (1) было перенесено на случай приближения целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ И. И. Ибрагимовым и Ф. Г. Насибовым [7] и независимо В. Ю. Поповым [8]. Многомерные аналоги неравенств Джексона были получены В. А. Юдиным [9], А. В. Московским [10], С. А. Пичуговым [11] и другими.

В [12] были установлены точные неравенства типа Джексона для приближения функций $f(t)\in L_2(\mathbf{R})$ частными суммами вейвлет-рядов в случае вейвлет Шеннона-Котельникова. Сформулируем результаты этой статьи. Функция $\psi\in L_2(\mathbf{R})$ называется вейвлетом [13, с. 244], если система функций

$$\psi_{n,l}(x)=2^{n/2}\psi(2^n x-l),\ x\in\mathbf{R},\ n,l\in\mathbf{Z},$$

является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbf{R})$. Пусть задана функция $\varphi(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$. Вейвлеты вида

$$\psi(t)=2\varphi(2t-1)-\varphi(t-1/2)$$

называются вейвлетами Шеннона-Котельникова. Через V_{n-1} обозначим подпространство пространства $L_2(\mathbf{R})$, которое состоит из функций вида

$$g(x)=\sum_{k<n}\sum_{j\in\mathbf{Z}} c_{k,j}\psi_{k,j}(x).$$

В [12] доказано, что при любых $n\in\mathbf{Z}$ имеют место неулучшаемые неравенства

$$E(f,V_{n-1})_2 < 2^{-1/2}\omega(f,2^{-n})_2, \tag{2}$$

$$E(f,V_{n-1})_2 < 2^{-1/2}\left\{2^{n-1}\pi\int_0^{2^{-n}}\omega(f,u)_2^2\sin(2^n\pi u)\,du\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Используя метод Н. И. Черных, мы доказываем точные неравенства типа Джексона для приближения функций $f\in L_2(\mathbf{R}^m)$ при помощи частных сумм вейвлет-рядов в случае многомерных аналогов вейвлет Шеннона-Котельникова. Полученные результаты являются аналогами результатов [11] для приближения периодических функций подпространством углов.

Пусть $\mathbf{R}^m$ – m-мерное евклидово пространство. Обозначим через $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ m-мерные векторы; $|\boldsymbol{x}|=(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_m|)$; $K_a^m=\{\boldsymbol{x}: 0\le x_i\le a_i, i=1,\dots,m\}$ – параллелепипед из $\mathbf{R}^m$. Для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ положим $\langle \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}\rangle=\sum_{i=1}^m x_iu_i$ и $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=(x_1u_1,\dots,x_mu_m)$. Неравенство $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{u}$ будем понимать как $x_i<u_i$, $\forall i=\overline{1,m}$. Пусть $L_2(\mathbf{R}^m)$ – пространство измеримых функций $f:\mathbf{R}^m\to\mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_2=\left(\int_{\mathbf{R}^m}|f(\boldsymbol{t})|^2\,dt_1\dots dt_m\right)^{1/2}.$$

Мы будем использовать преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^m} f(\boldsymbol{t})e^{-i\langle\xi,\boldsymbol{t}\rangle}dt_1\dots dt_m$$

и равенство Парсеваля

$$\|f\|_2=(2\pi)^{-m/2}\|\hat{f}\|_2.$$

Модулем непрерывности функции $f(\boldsymbol{t})\in L_2(\mathbf{R}^m)$ назовем функцию

$$\omega(f,\delta)_2=\sup_{|\boldsymbol{u}|\le\delta}\|\Delta_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})\|_2,$$

где $\Delta_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})=\Delta_{u_m}\dots\Delta_{u_1}f(\boldsymbol{x})$, $\Delta_{u_1}f(\boldsymbol{x})=f(x_1+u_1,x_2,\dots,x_m)-f(x_1,x_2,\dots,x_m)$.

Отметим, что для определенных выше вейвлет Шеннона-Котельникова $\operatorname{supp}\hat{\psi}=[-2\pi;-\pi]\cup[\pi;2\pi]$ и, следовательно, $\hat{\psi}_{n,l}(\xi)=0$ для любого $\xi\in(-\pi 2^n,\pi 2^n)$. Известно [14], что система функций $\left\{\psi_{n,l}^m(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^m 2^{n_i/2}\psi(2^{n_i}x_i-l_i)\right\}_{n,l\in\mathbf{Z}^m}$ образует ортонормированный базис $L_2(\mathbf{R}^m)$.

Ясно, что $\hat{\psi}^m_{n,l}(\xi)=0$ для любых $\xi\in\mathbb{R}^m\setminus\{\xi:\xi\geq\pi\cdot 2^n\}$, где $2^n=\left(2^{n_1},2^{n_2},\dots 2^{n_m}\right)$.

Через Ψ_N, $N\in\mathbf{Z}^m$ обозначим множество функций $h_N\in L_2(\mathbf{R}^m)$ вида

$$h_N(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^m\setminus\{n:n\geq N\}}\sum_{l\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\psi^m_{n,l}(x),\ c_{n,l}\in\mathbb{C}.$$

Для любого $N\in\mathbf{Z}^m$ положим

$$E(f,\Psi_N)_2=\inf\{\|f-h\|_2 : h\in\Psi_N\}.$$

Переходя к изложению основных результатов статьи, прежде всего, установим, что справедлива следующая

Теорема 1. *Для любой функция $f\in L_2(\mathbf{R}^m)$, неэквивалентной нулю, и любого вектора $N\in\mathbf{Z}^m$ справедливо неравенство*

$$E(f,\Psi_N)_2\leq\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{2^{N_1+\dots+N_m}\pi^m}{2^m}\int_{K^m_{2^{-N}}}\omega(f,u)_2^2\,\varphi(u)\,du_1\dots du_m\right\}^{1/2},\tag{4}$$

где $\varphi(u)=\prod_{k=1}^m\sin 2^{N_k}\pi u_k$. При этом константу $2^{-m/2}$ в правой части неравенства (4) *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Произвольную функцию $f\in L_2(\mathbf{R}^m)$ можно представить в виде суммы сходящегося в $L_2(\mathbf{R}^m)$ ряда

$$f(x)=\sum_{l,n\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\psi^m_{n,l}(x),$$

где $c_{n,l}=\int_{\mathbf{R}^m}f(x)\psi^m_{n,l}(x)\,dx_1\dots dx_m$. Наилучшее приближение функции f пространством Ψ_N реализуют частные суммы $S_Nf(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^m\setminus\{n:n\geq N\}}\sum_{l\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\psi^m_{n,l}(x)$, тогда наилучшее приближение функции f пространством Ψ_N равно

$$E(f,\Psi_N)_2^2=\|f-S_Nf\|_2^2=\left\|\sum_{n\geq N}\sum_{l\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\psi^m_{n,l}(x)\right\|_2^2=(2\pi)^{-m}\left\|\sum_{n\geq N}\sum_{l\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\hat{\psi}^m_{n,l}\right\|_2^2.$$

Поскольку $\hat{\psi}^m_{k,l}(\xi)$ принимает нулевые значения для любых ξ, таких, что $\min\limits_{1\leq i\leq m}\frac{|\xi_i|}{2^{k_i}\pi}<1$, то

$$E(f,\Psi_N)_2^2=(2\pi)^{-m}\int_{|\xi|\geq 2^N\cdot\pi}\left|\sum_{n\geq N}\sum_{l\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\hat{\psi}^m_{n,l}(\xi)\right|^2d\xi_1\dots d\xi_m\tag{5}$$

Оценим модуль непрерывности функции $f\in L_2(\mathbf{R}^m)$:

$$\omega(f,u)_2^2\geq\|\Delta_uf\|_2^2=\left\|\sum_{l,n\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\Delta_u\psi^m_{n,l}\right\|_2^2=(2\pi)^{-m}\left\|\sum_{l,n\in\mathbf{Z}^m}c_{n,l}\hat{\psi}^m_{n,l}\prod_{k=1}^m\left(e^{i\xi_ku_k}-1\right)\right\|_2^2\geq$$

$$\geq (2\pi)^{-m} \int_{|\xi|\geq 2^N \pi} \left| \sum_{l,n\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \prod_{k=1}^{m} \left| e^{i\xi_k u_k} - 1 \right|^2 d\xi_1 ... d\xi_m .$$

Учитывая, что $\left| e^{i\xi_k u_k} - 1 \right|^2 = 2(1-\cos \xi_k u_k)$ будем иметь

$$\omega(f,\boldsymbol{u})_2^2 \geq (2\pi)^{-m} \int_{|\xi|\geq 2^N \pi} \left| \sum_{l,n\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \prod_{k=1}^{m} 2(1-\cos \xi_k u_k) d\xi_1 ... d\xi_m =$$

$$= \frac{1}{\pi^m} \int_{|\xi|\geq 2^N \cdot \pi} \left| \sum_{n\geq N} \sum_{l\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \prod_{k=1}^{m} (1-\cos \xi_k u_k) d\xi_1 ... d\xi_m .$$

Для упрощения записи через I^m обозначим множество $\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\} : x_i = 0,1;$ $i=\overline{1,m} \}$, тогда

$$\omega(f,\boldsymbol{u})_2^2 \geq \frac{1}{\pi^m} \int_{|\xi|\geq 2^N \cdot \pi} \left| \sum_{n\geq N} \sum_{l\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 d\xi_1 ... d\xi_m +$$

$$+ \frac{1}{\pi^m} \int_{|\xi|\geq 2^N \cdot \pi} \left| \sum_{n\geq N} \sum_{l\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \sum_{h\in I^m} \prod_{k=1}^{m} (-\cos \xi_k u_k)^{h_k} d\xi_1 ... d\xi_m .$$

Учитывая равенство (5), получаем

$$\omega(f,\boldsymbol{u})_2^2 \geq 2^m E(f,\Psi_N)_2^2 + \frac{1}{\pi^m} \int_{|\xi|\geq 2^N \cdot \pi} \left| \sum_{n\geq N} \sum_{l\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \times$$

$$\times \sum_{h\in I^m} \prod_{k=1}^{m} (-\cos \xi_k u_k)^{h_k} d\xi_1 ... d\xi_m . \qquad (6)$$

Умножим правую и левую части неравенства (6) на $\varphi(\boldsymbol{u}) = \prod_{k=1}^{m} \sin 2^{N_k} \pi u_k$ и проинтегрируем полученное неравенство по $\boldsymbol{u}$ по параллелепипеду $K^m_{2^{-N}}$. Получим

$$\int_{K^m_{2^{-N}}} \omega(f,\boldsymbol{u})_2^2 \varphi(\boldsymbol{u}) du_1 ... du_m \geq 2^m \int_{K^m_{2^{-N}}} E(f,\Psi_N)_2^2 \varphi(\boldsymbol{u}) du_1 ... du_m +$$

$$+ \frac{1}{\pi^m} \int_{K^m_{2^{-N}}} \int_{|\xi|\geq 2^N \cdot \pi} \left| \sum_{n\geq N} \sum_{l\in \mathbf{Z}^m} c_{n,l} \hat{\psi}^m_{n,l}(\xi) \right|^2 \times$$

$$\times \sum_{h\in I^m} \prod_{k=1}^{m} (-\cos \xi_k u_k)^{h_k} \sin 2^{N_k} \pi u_k d\xi_1 ... d\xi_m du_1 ... du_m$$

или

$$\int_{K^m_{2^{-N}}} \omega(f,\boldsymbol{u})_2^2 \varphi(\boldsymbol{u}) du_1 ... du_m \geq 2^m E(f,\Psi_N)_2^2 \int_{K^m_{2^{-N}}} \varphi(\boldsymbol{u}) du_1 ... du_m +$$

$$+\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{|\xi|\geq 2^N\cdot\pi}\left|\sum_{n\geq N}\sum_{l\in Z^m}c_{n,l}\hat{\psi}^m_{n,l}(\xi)\right|^2\sum_{h\in I^m}\prod_{k=1}^{m}\int\limits_0^{2^{-N_k}}(-\cos\xi_k u_k)^{h_k}\sin 2^{N_k}\pi u_k du_k d\xi_1...d\xi_m. \quad (7)$$

Отметим, что

$$\int\limits_{K^m_{2^{-N}}}\varphi(\boldsymbol{u})du_1...du_m=\prod_{k=1}^{m}\int\limits_0^{2^{-N_k}}\sin 2^{N_k}\pi u_k du_k=\frac{2^m}{2^{N_1+...+N_m}\pi^m}.$$

Так как

$$\prod_{k=1}^{m}\int\limits_0^{2^{-N_k}}(-\cos\xi_k u_k)^{h_k}\sin 2^{N_k}\pi u_k du_k=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{2^{N_k}\pi}\right)^{1-h_k}\left(\frac{-2^{N_k}\pi}{\left(2^{N_k}\pi\right)^2-\xi_k^2}\left(1+\cos\frac{\xi_k}{2^{N_k}}\right)\right)^{h_k}$$

принимает положительные значения для всех ξ таких, что $|\xi|\geq 2^N\cdot\boldsymbol{\pi}$, то второе слагаемое в правой части (7) также положительно. Таким образом неравенство (7) примет вид

$$\int\limits_{K^m_{2^{-N}}}\omega(f,\boldsymbol{u})_2^2\,\varphi(\boldsymbol{u})du_1...du_m\geq 2^m E(f,\Psi_N)_2^2\frac{2^m}{2^{N_1+...+N_m}\pi^m}.$$

Неравенство (4) доказано. Точность константы в неравенстве (4) следует из точности константы в неравенстве (3). А именно, для $\forall\varepsilon>0$ рассмотрим функцию $f(x)=\prod_{k=1}^{m}f_k(x_k)$, где для $f_k(x)\in L_2(\mathbf{R})$ такова, что выполняется неравенство

$$E\left(f_k,V_{N_k-1}\right)_2>\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{2^{N_k-1}\pi\int\limits_0^{2^{-N_k}}\omega(f_k,u)_2^2\sin\left(2^{N_k}\pi u\right)du\right\}^{1/2}.$$

Тогда

$$E(f,\Psi_N)_2=\left\|\sum_{n\geq N}\sum_{l\in Z^m}c_{n,l}\psi^m_{n,l}\right\|_2=\prod_{k=1}^{m}\left\|\sum_{n=N_k}^{\infty}\sum_{l\in Z}\tilde{n}_{n,l}\psi_{n,l}\right\|_2=\prod_{k=1}^{m}E\left(f_k,V_{N_k-1}\right)_2,$$

а модуль непрерывности

$$\omega(f,\boldsymbol{\delta})_2=\sup_{|u|\leq\delta}\left\|\Delta_u f(\boldsymbol{x})\right\|_2=\prod_{k=1}^{m}\sup_{|u_k|\leq\delta_k}\left\|f_k(x_k+u_k)-f_k(x_k)\right\|_2=\prod_{k=1}^{m}\omega(f_k,\delta_k)_2.$$

Таким образом

$$E(f,\Psi_{\bar N})_2=\prod_{k=1}^{m}E(f_k,V_{N_k-1})_2>\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{2^{N_k-1}\pi\int\limits_0^{2^{-N_k}}\omega(f_k,u)_2^2\sin\left(2^{N_k}\pi u\right)du\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{(1-\varepsilon)^m}{2^{m/2}}\left\{\frac{2^{N_1+...+N_m}\pi^m}{2^m}\int\limits_{K^m_{2^{-N}}}\omega(f,\boldsymbol{u})_2^2\prod_{k=1}^{m}\sin\left(2^{N_k}\pi u_k\right)du_1...du_m\right\}^{1/2}.$$

В силу произвольности выбора ε теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любой функции* $f\in L_2\left(\mathbf{R}^m\right)$, *неэквивалентной нулю, и любого вектора* $N\in\mathbf{Z}^m$ *справедливо неравенство*

$$E(f,\Psi_N)_2 \le 2^{-m/2}\,\omega\left(f,2^{-N}\right)_2. \tag{8}$$

При любом фиксированном $N \in \mathbf{Z}^m$ *і константу* $2^{-m/2}$ *в правой части неравенства* (8) *уменьшить нельзя.*

Доказательство. Поскольку $\omega\left(f,\boldsymbol{u}\right)_2$ неубывающая функция, то из неравенства (4) получаем

$$E(f,\Psi_N)_2 \le \frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{2^{N_1+\ldots+N_m}\pi^m}{2^m}\,\omega\left(f,2^{-N}\right)_2^2 \int\limits_{K^m_{2^{-N}}} \varphi(\boldsymbol{u})\,du_1\ldots du_m\right\}^{1/2} = \frac{1}{2^{m/2}}\,\omega\left(f,2^{-N}\right)_2$$

Неравенство (8) доказано. Неулучшаемость константы $2^{-m/2}$ в правой части неравенства (8) следует из неулучшаемости константы в неравенстве (2). Устанавливается это с помощью рассуждений аналогичных доказательству точности константы в предыдущей теореме. Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве L_2 функций на многомерной сфере. // Мат. заметки. – 1996 – Т. 60, №3 – С. 333 – 355.
2. **Иванов В.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. / В.И.Иванов, О.И.Смирнов // – Тула, 1995 – 191 с.
3. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближений. – М., 1987 – 424 с.
4. **Лигун А. А.** Точные константы в неравенствах типа Джексона. /Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами. – К., 1990 – С. 5 – 74.
5. **Черных Н. И.** О неравенствах Джексона в L_2 // Труды МИАН 88 – 1967 –С. 71 – 74.
6. **Черных Н. И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2. // Мат. заметки. – 1967 – Т2, №5 – С. 513 – 522.
7. **Ибрагимов И. И.** Оценка наилучшего приближения суммируемой функции на действительной оси целыми функциями конечной степени. / И. И.Ибрагимов,Ф. Г. Насибов // Докл. АН СССР – 1970 – Т.194, №5 – С. 1113 – 1116.
8. **Попов В. Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа. // Изв ВУЗов, Математика – 1972, №6 – С. 65 – 73.
9. **Юдин В. А.** Многомерная теорема Джексона в L_2. // Мат. заметки. – 1981 – Т 29, №2 – С. 309 – 315.
10. **Московский А. В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_{p,\lambda}(R_+)$. // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер матем., мех., информатика –1997 – Т3, №1 – С. 44 – 70.
11. **Пичугов С. А.** О приближении периодических функций многих переменных в метрике L_2. // Ислед. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил. – 1976 – С. 49 – 50.
12. **Бабенко В. Ф.** О неравенствах типа Джексона для наилучших L_2-приближений при помощи вейвлет. / В. Ф. Бабенко, Г. С. Жиганова, Л. С. Новикова // Вісник Дніпропет. ун-ту. Математика – 2006 – №11 – С. 3 – 8.
13. **Кашин В.С.** Ортогональные ряды /В.С. Кашин, А. А. Саакян. // – М., 1999 – 560 с.
14. **Стрелков Н.А.** Универсально оптимальные всплески. // Мат. сборник – 1997 – Т 188, №1 – С. 148 – 160.

Надійшла до редколегії 23.04.07